

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	5
CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LOGIC.....	6
1.1. Mệnh đề và các phép toán mệnh đề	6
1.1.1. <i>Khái niệm</i>	6
1.1.2. <i>Các phép tính mệnh đề</i>	7
1.1.3. <i>Phép toán trên bit.....</i>	9
1.2. Dạng mệnh đề.....	10
1.2.1. <i>Định nghĩa</i>	10
1.2.2. <i>Mệnh đề tương đương.....</i>	12
1.3. Quy tắc suy diễn.....	14
1.3.1. <i>Quy tắc Modus Ponens</i>	15
1.3.2. <i>Tam đoạn luận.....</i>	15
1.3.3. <i>Quy tắc Modus Tollens</i>	16
1.3.4. <i>Tam đoạn luận rời.....</i>	16
1.3.5. <i>Quy tắc mâu thuẫn</i>	16
1.3.6. <i>Quy tắc chứng minh theo trường hợp</i>	17
1.4. Vị từ và lượng từ.....	18
1.4.1. <i>Vị từ</i>	18
1.4.2. <i>Phép toán vị từ</i>	19
1.4.2. <i>Các lượng từ.....</i>	19
1.5. Nguyên lý quy nạp	22
1.5.1. <i>Chứng minh quy nạp</i>	22
1.5.2. <i>Nguyên lý chứng minh quy nạp yếu</i>	23
1.5.3. <i>Nguyên lý chứng minh quy nạp mạnh.....</i>	26
1.6. Các nguyên lý đếm.....	27
1.6.1. <i>Nguyên lý cộng.....</i>	27
1.6.2. <i>Nguyên lý nhân:</i>	30
1.6.3. <i>Chỉnh hợp, tổ hợp, tổ hợp lặp.....</i>	33

1.6.4. Nguyên lý chuồng bồ câu (Nguyên lý Dirichlet)	39
TIỂU KẾT CHƯƠNG 1	41
A. Hệ thống nội dung trọng tâm.....	41
B. Nội dung thảo luận – nhiệm vụ học tập	41
C. Bài tập chương.....	41
CHƯƠNG 2. QUAN HỆ	48
2.1. Quan hệ hai ngôi.....	48
2.1.1. Tích Descartes của các tập hợp	48
2.1.2. Quan hệ hai ngôi	48
2.1.3. Một số tính chất của quan hệ hai ngôi.....	51
2.2. Quan hệ tương đương	53
2.2.1. Quan hệ tương đương	53
2.2.2. Lớp tương đương và tập thương.....	54
2.3. Quan hệ thứ tự	55
2.3.1. Quan hệ thứ tự.....	55
2.3.2. Quan hệ thứ tự toàn phần – Tập sắp thứ tự	56
2.3.3. Các phần tử đặc biệt.....	57
2.4. Quan hệ n-ngôi và ứng dụng.....	59
TIỂU KẾT CHƯƠNG 2	63
A. Hệ thống các nội dung trọng tâm.....	63
B. Nội dung thảo luận – Nhiệm vụ tự học	63
C. Bài tập Chương 2.....	64
CHƯƠNG 3. THUẬT TOÁN VÀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ	69
3.1. Thuật toán.....	69
3.1.1. Thuật toán và cách biểu diễn thuật toán.....	69
3.1.2. Độ phức tạp của thuật toán.....	72
3.1.3. Một số thuật toán số học	75
3.1.4. Thuật toán đệ quy	79
3.2. Lý thuyết đồ thị	81

3.2.1. Các khái niệm cơ bản	82
3.2.2. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông.....	85
3.2.3. Đồ thị vô hướng liên thông.....	88
3.2.4. Đồ thị có hướng liên thông.....	89
3.2.5. Đồ thị Euler và đồ thị Hamilton.....	90
3.3. Sơ lược về cây.....	102
3.3.1. Tính chất cơ bản của một cây.....	104
3.3.2. Cây n -phân.....	104
3.3.2. Ký pháp Balan.....	107
3.4. Bài toán về đường đi ngắn nhất	108
3.4.1. Thuật toán Dijkstra	109
3.4.2. Thuật toán Ford-Bellman	113
TIỂU KẾT CHƯƠNG 3.....	114
A. Hệ thống nội dung trọng tâm	114
B. Nội dung thảo luận - nhiệm vụ tự học	114
C. Bài tập chương	114
CHƯƠNG 4. ĐẠI SỐ BOOLE VÀ HÀM BOOLE	118
4.1. Đại số Boole	118
4.1.1. Định nghĩa	118
4.1.2. Tính chất	119
4.2. Hàm Boole	124
4.2.1. Khái niệm cơ bản	124
4.2.2. Tính chất	126
4.3. Mạng các cổng và công thức đa thức tối thiểu.....	128
4.3.1. Khái niệm cơ bản	128
4.3.2. Bài toán tối ưu.....	129
4.4. Phương pháp biểu đồ Karnaugh.....	131
4.4.1. Khái niệm cơ bản	131
4.3.2. Tính chất	133

TIÊU KẾT CHƯƠNG 4	142
A. Hệ thống nội dung trọng tâm.....	142
B. Nội dung thảo luận – nhiệm vụ học tập	142
C. Bài tập chương.....	142
TÀI LIỆU THÀM KHẢO.....	145

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình “*Toán rời rạc ứng dụng trong Tin học và công nghệ Tiểu học*” là tài liệu giảng dạy và học tập dành cho giảng viên và sinh viên chuyên ngành Tin học và Công nghệ (Giáo dục Tiểu học). Nội dung của giáo trình bao gồm những kiến thức cơ bản và ứng dụng của *Logic toán*, *Đại số mệnh đề*, *Đại số quan hệ*, *Lý thuyết đồ thị và thuật toán*, *Đại số Boole* vào lĩnh vực *Tin học và công nghệ*.

Đây là những kiến thức, phương pháp Toán rời rạc làm cơ sở và công cụ để sinh viên học tập và nghiên cứu những học phần liên quan đến dạy học *Tin học và Công nghệ ở Tiểu học*.

Về mục tiêu phát triển tư duy, học phần “*Toán rời rạc ứng dụng trong Tin học và công nghệ Tiểu học*” góp phần giúp sinh viên bồi dưỡng tư duy toán học, đặc biệt là *tư duy logic và tư duy thống kê*, xem xét, nhìn nhận các hiện tượng “rời rạc, ngẫu nhiên” trong thực tiễn từ yêu cầu phát hiện và vận dụng các quy luật chung một cách chính xác, chặt chẽ về mặt toán học; đồng thời có thói quen và khả năng “*rời rạc hóa những quá trình liên tục*” để hình thành năng lực vận dụng toán học - nói riêng là *Toán rời rạc* vào giải quyết những vấn đề thực tiễn thông qua *áp dụng kiến thức, ngôn ngữ hay các mô hình toán học rời rạc trong việc phân tích, mô tả, giải quyết các bài toán thực tế, xây dựng các ứng dụng thực tiễn ...* Qua đó, sinh viên có điều kiện nhận thức và dạy học những nội dung chuyên môn về Tin học và Công nghệ thông tin.

Mục tiêu chính của giáo trình nhằm giúp cho sinh viên có hiểu biết, kỹ năng vận dụng công cụ Toán rời rạc (kiến thức, ngôn ngữ, mô hình toán học) trong việc phân tích, mô tả, giải quyết một số bài toán có nội dung thực tế thuộc lĩnh vực *Tin học và công nghệ*. Từ đó góp phần phục vụ mục tiêu đào tạo giáo viên Tiểu học chuyên ngành *Tin học công nghệ*.

Giáo trình được biên soạn gồm 04 chương:

Chương 1: Cơ sở logic

Chương 2: Quan hệ

Chương 3: Thuật toán và lý thuyết đồ thị

Chương 4: Đại số Boole và hàm Boole

Đây là tài liệu được biên soạn theo chương trình và phương pháp đáp ứng yêu cầu đổi mới chương trình nội dung giáo dục đại học, do vậy chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp chân thành của bạn đọc, đặc biệt là đội ngũ giảng viên, sinh viên các trường Sư phạm, giáo viên tiểu học trong cả nước.

CHƯƠNG 1. CƠ SỞ LOGIC

1.1. Mệnh đề và các phép toán mệnh đề

1.1.1. Khái niệm

Định nghĩa 1.1. Mỗi câu phát biểu là đúng hoặc sai được gọi là *một mệnh đề*.

Mệnh đề đúng được gọi là có giá trị chân lí đúng (hay chân trị đúng).

Mệnh đề sai được gọi là có chân trị sai.

Chân trị của mệnh đề đúng kí hiệu là 1.

Chân trị của mệnh đề sai kí hiệu là 0.

Bảng chân trị của mệnh đề bao gồm các trường hợp đúng, sai có thể xảy ra của mệnh đề đó.

Ví dụ 1.1. Các khẳng định sau là mệnh đề:

1) Môn Toán rời rạc là môn bắt buộc cho ngành Sư phạm Tin học và Công nghệ Tiểu học.

2) $2 + 3 = 5$

3) $3 \times 4 = 10$.

4) Tam giác đều có ba cạnh bằng nhau.

5) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

6) Washington D.C. là thủ đô của Canada.

Ta có 2), 4), 5) là các mệnh đề đúng. 3), 6) là các mệnh đề sai.

Như vậy, một mệnh đề có thể là mệnh đề đúng hoặc mệnh đề sai. Hay nói cách khác, một mệnh đề chỉ có thể lựa chọn một trong hai giá trị là đúng hoặc là sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ 1.2. Xét các câu phát biểu sau:

1) Hôm nay là thứ mấy?

2) Một số thực âm không phải là số chính phương.

3) $x + 1 = 2$

4) $x + y = z$

Ta thấy 1) không là mệnh đề vì nó chỉ là một câu hỏi không có giá trị đúng, sai.

2) có chân trị là đúng nếu xét trên tập hợp số thực nhưng lại có chân trị sai khi xét trên tập hợp số phức.

3), 4) là mệnh đề vì chúng không đúng cũng không sai bởi các biến trong những câu đó chưa được gán cho một giá trị cụ thể nào.

Mục đích của hoạt động khoa học là phân biệt các mệnh đề để xác định chân trị của nó. Sự xác định chân trị này dựa vào thực nghiệm và lí luận. Lí luận ở đây là xác

định chân trị của mệnh đề bằng cách kết hợp các mệnh đề mà ta đã biết chân trị. Các luật lệ chế ngự cách kết hợp mang tính chính xác của phép toán đại số. Vì thế, chúng ta cần nói đến “Đại số mệnh đề”.

1.1.2. Các phép toán mệnh đề

Trong phép toán mệnh đề, người ta không quan tâm đến ý nghĩa của câu phát biểu mà chỉ chú ý đến chân trị của các mệnh đề. Do đó, khi thực hiện các phép toán mệnh đề thông thường người ta chỉ ghi kí hiệu. Các chữ cái thường dùng để kí hiệu mệnh đề là $p, q, r, \dots$

Có hai loại mệnh đề: Mệnh đề chỉ có một giá trị đơn (luôn đúng hoặc sai) được gọi là mệnh đề *nguyên thủy* hay *sơ cấp*. Ví dụ như “Hôm nay trời nắng”, “5 là số nguyên tố” là các mệnh đề nguyên thủy.

Các mệnh đề không phải là mệnh đề nguyên thủy được gọi là *mệnh đề phức hợp*. Thông thường, tất cả mệnh đề phức hợp là mệnh đề liên kết (có chứa phép toán mệnh đề). Ví dụ như “Nếu trời đẹp thì tôi đi dạo” là mệnh đề phức hợp.

Các phép toán mệnh đề được sử dụng nhằm mục đích kết nối các mệnh đề để tạo ra mệnh đề mới. Các phép toán mệnh đề được trình bày trong chương này bao gồm: *phép phủ định, phép hội, phép tuyển, phép XOR, phép kéo theo, phép tương đương*.

a. Phép phủ định: Cho p là một mệnh đề, câu “không phải là p ” là một mệnh đề được gọi là *phủ định của mệnh đề p* . Kí hiệu: $\bar{p}$ hay $\neg p$.

Ví dụ 1.3. $p = “2 > 0”$ thì $\bar{p} = “2 \leq 0”$.

Quy tắc: Nếu p có giá trị là 1 thì phủ định $\bar{p}$ có giá trị là 0.

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

Bảng 1.1. Giá trị chân lí của $\bar{p}$

b. Phép hội: Cho hai mệnh đề p, q . Câu xác định “ p và q ” là một mệnh đề và được gọi là *hội của hai mệnh đề p và q* . Kí hiệu $p \wedge q$.

Ví dụ 1.4. Cho hai mệnh đề p và q : $p = “2 > 0”$ là mệnh đề đúng; $q = “2 = 0”$ là mệnh đề sai. Khi đó $p \wedge q = “2 > 0$ và $2 = 0”$ là mệnh đề sai.

Quy tắc: Hội của hai mệnh đề chỉ đúng khi cả hai mệnh đề là đúng. Các trường hợp còn lại là sai.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Bảng 1.2. Giá trị chân lí của $p \wedge q$

c. *Phép tuyển*: Cho hai mệnh đề p, q . Câu xác định “ p hoặc q ” là một mệnh đề và được gọi là *tuyển của hai mệnh đề* p và q . Kí hiệu $p \vee q$.

Ví dụ 1.5. Cho hai mệnh đề p và q : $p = “2 > 0”$ là mệnh đề đúng; $q = “2 = 0”$ là mệnh đề sai. Khi đó $p \vee q = “2 \geq 0”$ là mệnh đề đúng.

Quy tắc: Tuyển của hai mệnh đề chỉ sai khi cả hai mệnh đề là sai. Các trường hợp còn lại là đúng.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0
Bảng 1.3. Giá trị chân lí của $p \vee q$		

d. *Phép XOR*: Cho hai mệnh đề p và q . Câu xác định “loại trừ p hoặc loại trừ q ”, nghĩa là “hoặc là P đúng hoặc Q đúng nhưng không đồng thời cả hai là đúng” là một mệnh đề và được gọi là *p XOR q* . Kí hiệu $p \oplus q$.

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0
Bảng 1.4. Giá trị chân lí của $p \oplus q$		

e. *Phép kéo theo*: Cho p và q là hai mệnh đề. Câu “Nếu p thì q ” là một mệnh đề và được gọi là *mệnh đề kéo theo của hai mệnh đề* p và q . Kí hiệu $p \Rightarrow q$, p được gọi là giả thiết và q được gọi là kết luận.

Ví dụ 1.6. Cho hai mệnh đề p và q : $p = “tam giác T là đều”$; $q = “tam giác T có một góc bằng $60^\circ”$. Để xét chân trị của mệnh đề $p \Rightarrow q$, ta có nhận xét sau:$

- Nếu p đúng, nghĩa là tam giác T là đều thì rõ ràng rằng $p \Rightarrow q$ là đúng.

- Nếu p sai, nghĩa là tam giác T không đều và cũng không là cân thì dù q là đúng hay sai thì mệnh đề $p \Rightarrow q$ vẫn đúng.

Quy tắc: Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi giả thiết đúng và kết luận sai. Các trường hợp còn lại là đúng.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1
Bảng 1.5. Giá trị chân lí của $p \Rightarrow q$		

Từ mệnh đề $p \Rightarrow q$, chúng ta có thể tạo ra các mệnh đề kéo theo khác như là mệnh đề $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ và $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$. Hai mệnh đề này lần lượt được gọi là *mệnh đề đảo*, *mệnh đề phản* và *mệnh đề phản đảo* của mệnh đề $p \Rightarrow q$.

Ví dụ 1.7. Tìm mệnh đề đảo, mệnh đề phản và mệnh đề phản đảo của mệnh đề: “Nếu tôi có nhiều tiền thì tôi mua xe hơi”.

Mệnh đề đảo là: “Nếu tôi mua xe hơi thì tôi có nhiều tiền”. Mệnh đề phản là: “Nếu tôi không có nhiều tiền thì tôi không mua xe hơi”. Mệnh đề phản đảo là: “Nếu tôi không mua xe hơi thì tôi không có nhiều tiền”.

f. Phép tương đương: Cho p và q là hai mệnh đề. Câu xác định “ p nếu và chỉ nếu q ” là một mệnh đề và được gọi là p tương đương q . Kí hiệu $p \Leftrightarrow q$.

Mệnh đề tương đương là đúng khi p và q có cùng chân trị.

$$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Đọc là p nếu và chỉ nếu q . Ta có p là cần và đủ đối với q ; Ta có thể nói “Nếu p thì q và ngược lại”.

p	Q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
Bảng 1.5. Giá trị chân lí của $p \Leftrightarrow q$		

Quy tắc: Mệnh đề tương đương chỉ đúng khi và chỉ khi p và q cùng đúng hoặc cùng sai. Sai trong các trường hợp còn lại

1.1.3. Phép toán trên bit

Trong máy tính dùng các bit để biểu diễn thông tin. Một bit có hai giá trị khả dĩ là 0 và 1. Bit cũng có thể được dùng để biểu diễn chân trị. Thường người ta dùng bit 1 để biểu diễn chân trị đúng và bit 0 để biểu diễn chân trị sai. Các phép toán trên bit trong máy tính là các phép toán logic. Thông tin thường được biểu diễn bằng cách dùng các xâu bit. Ta có định nghĩa xâu bit như sau:

Định nghĩa 1.2. Xâu bit (hoặc xâu nhị phân) là dãy có một hoặc nhiều bit. Chiều dài của xâu là số các bit trong xâu đó.

Ví dụ 1.8. Xâu bit 101011000 có chiều dài là 9.

Có thể mở rộng các phép toán trên bit tới các xâu bit. Người ta định nghĩa các *OR* bit, *AND* bit và *XOR* bit đối với hai xâu bit có cùng chiều dài là các xâu có các bit của chúng là *OR*, *AND*, *XOR* của các bit tương ứng trong hai xâu tương ứng. Chúng ta

cũng dùng các kí hiệu $\vee, \wedge, \oplus$ để biểu diễn các phép tính *OR* bit, *AND* và *XOR* tương ứng.

Ví dụ 1.9. Tìm *OR* bit, *AND* bit và *XOR* bit đối với hai xâu: 01101 10110 và 11000 11101.

Ta có: *OR* bit: 11101 11111; *AND* bit: 01000 10100; *XOR* bit: 10101 01011.

1.2. Dạng mệnh đề

1.2.1. Định nghĩa

Trong Đại số ta có các biểu thức được xây dựng từ:

Các số nguyên, hữu tỉ, thực,... (mà ta gọi là hằng số);

Các biến $z, y, z, \dots$ có thể lấy giá trị là các hằng số;

Các phép toán thao tác trên hằng số và biến số theo một thứ tự nhất định. Khi thay thế các biến trong biểu thức đại số bởi hằng số thì kết quả thực hiện các phép toán trong biểu thức sẽ là một hằng số xác định.

Tương tự trong phép toán mệnh đề ta cũng có các “biểu thức logic” mà ta gọi là các dạng mệnh đề được xây dựng từ:

Các mệnh đề (hằng mệnh đề);

Các biến mệnh đề $p, q, r \dots$ có thể lấy giá trị là các mệnh đề nào đó;

Định nghĩa 1.3. Dạng mệnh đề là biểu thức logic được xây dựng từ các hằng mệnh đề, các biến mệnh đề và các phép toán mệnh đề theo một thứ tự xác định.

Thứ tự các phép toán trong dạng mệnh đề được xác định bởi các dấu ngoặc “()” để chỉ rõ phép toán thực hiện trên cặp mệnh đề nào.

Ví dụ 1.10. $E(p, q, r) = (p \wedge q \vee \bar{p} \Rightarrow p_0)$ là một dạng mệnh đề trong đó p, q, r là các biến mệnh đề còn p_0 là một hằng mệnh đề.

Giả sử E, F là hai dạng mệnh đề, khi ấy $\bar{E}, E \wedge F, E \vee F \Rightarrow F$ và $E \Leftrightarrow F$ là các dạng mệnh đề. Bằng cách này ta xây dựng được các dạng mệnh đề phức tạp hơn.

Để xác định chân trị dạng mệnh đề $E(p, q, r, \dots)$ ta thay các biến mệnh đề $p, q, r, \dots$ bởi giá trị chân lý xác định 0, 1. Tức là mỗi dạng mệnh đề $E(p, q, r, \dots)$ có một bảng chân trị xác định trong đó mỗi dòng cho biết chân trị của $E(p, q, r, \dots)$ theo các chân trị cụ thể của $p, q, r, \dots$

Định nghĩa 1.4.

- i) Một dạng mệnh đề được gọi là một *hằng đúng* nếu nó luôn lấy chân trị 1.
- ii) Một dạng mệnh đề được gọi là một *hằng sai* hay *mâu thuẫn* nếu nó luôn luôn lấy chân trị 0.

Ví dụ 1.11. Tìm bảng chân trị của hai dạng mệnh đề $E = p \vee (q \wedge r)$ và $F = (p \vee q) \wedge r$ theo các biến mệnh đề p, q, r .

p	q	r	$q \wedge r$	$E = p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$F = (p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Theo bảng trên ta có hai dạng mệnh đề $E = p \vee (q \wedge r)$, $F = (p \vee q) \wedge r$ có bảng chân trị khác nhau. Do đó thứ tự thực hiện các phép tính mệnh đề là cần thiết và quan trọng. *Quy ước:* $(\bar{p}) \wedge q = \bar{p} \wedge q$.

Định nghĩa 1.5. Hai dạng mệnh đề E và F được gọi là *tương đương logic* (kí hiệu $E \Leftrightarrow F$) nếu chúng có cùng bảng chân trị.

Ví dụ 1.12. Tìm bảng chân trị của hai dạng mệnh đề $p \Rightarrow q$ và $\bar{p} \vee q$

p	q	$\bar{p}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{p} \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Như vậy hai dạng mệnh đề $p \Rightarrow q$ và $\overline{p} \vee q$ có cùng bảng chân trị. Ta nói chúng tương đương logic.

Nhận xét. Theo Định nghĩa 1.4 nếu E và F tương đương logic thì dạng mệnh đề $E \Leftrightarrow F$ là hằng 1.

1.2.2. Mệnh đề tương đương

Mệnh đề 1.1. Hai dạng mệnh đề E và F là tương đương logic khi và chỉ khi $E \Leftrightarrow F$ là một hằng đúng.

Định nghĩa 1.6. Dạng mệnh đề F được gọi là *hệ quả logic* của dạng mệnh đề E nếu $E \Rightarrow F$ là hằng đúng. Ta cũng nói E có hệ quả logic là F .

Nhận xét:

i) E tương đương logic với F khi và chỉ khi F là hệ quả logic của E và E là hệ quả logic của F .

ii) Trong phép toán mệnh đề, ta thường không phân biệt các dạng mệnh đề tương đương logic.

iii) Nếu thay biểu thức con F trong dạng mệnh đề E bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được tương đương logic với E .

Ví dụ 1.13. Ta có $E = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ tương đương logic với $F = p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$ vì ở đây ta đã thay biểu thức con $q \Rightarrow r$ bởi dạng mệnh đề tương đương logic là $\overline{q} \vee r$.

Chú ý. Để “rút gọn” một dạng mệnh đề ta thường thay một biểu thức con bởi một dạng mệnh đề tương đương nhưng đơn giản hơn.

Ngoài ra nếu dạng mệnh đề $E(p, q, r, \dots)$ là một hằng đúng thì ta có thể thay p bởi một dạng mệnh đề tùy ý $F(p', q', r', \dots)$ mà dạng mệnh đề nhận được theo các biến $q, r, \dots, p', q', r', \dots$ vẫn còn là một hằng đúng.

Ví dụ 1.14. 1) Ta có hằng đúng: $E(p, q) = p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$. Thay p bởi $r \wedge s$ ta được một hằng đúng mới $E(p, r, s) = (r \wedge s) \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{(r \wedge s)} \vee q$.

Bên cạnh đó ta có mười quy luật logic được phát biểu dưới dạng các tương đương logic để rút gọn một dạng mệnh đề cho trước.

Định lý 1.1. (Quy luật logic): Với p, q, r là các biến mệnh đề, 1 là một hằng đúng và 0 là một hằng sai, ta có các tương đương logic:

i) Phủ định của phủ định: $\overline{\overline{p}} = p$

ii) Quy tắc De Morgan: $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}, \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

iii) Luật giao hoán: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

iv) Luật kết hợp: $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r, p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

v) Luật phân phối:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

vi) Luật lũy đẳng: $p \wedge p \Leftrightarrow p, p \vee p \Leftrightarrow p$

vii) Luật trung hòa: $p \wedge 1 \Leftrightarrow p, p \vee 0 \Leftrightarrow p$

viii) Luật về phần tử bù: $p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow 0, p \vee \overline{p} \Leftrightarrow 1$

ix) Luật thống trị: $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0, p \vee 1 \Leftrightarrow 1$

x) Luật hấp thụ: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p, p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Chứng minh. Ta dễ dàng chứng minh mười quy luật logic trên bằng cách lập bảng chân trị hai vế của tương đương logic (Bài tập).

Ví dụ 1.15. Chứng minh dạng mệnh đề sau là hằng đúng

$$a) E(r, s, t, u) = (r \Rightarrow s) \wedge [(r \Rightarrow s) \Rightarrow (\overline{t} \vee u)] \Rightarrow (\overline{t} \vee u) \quad (1.1)$$

$$b) F(p, q, r) = (p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad (1.2)$$

Chứng minh: a) Để chứng minh dạng mệnh đề (1.1) là hằng đúng ta thay $r \Rightarrow s$ bởi p và $\overline{t} \vee u$ bởi q và chứng minh dạng mệnh đề $E(p, q) = p \wedge [p \Rightarrow q] \Rightarrow q$ là hằng

đúng. Ta có $E(p, q) = p \wedge [p \Rightarrow q] \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge [\overline{p} \vee q] \Rightarrow q$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge q)] \Rightarrow q \Leftrightarrow [0 \vee (p \wedge q)] \Rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p \wedge q} \vee q \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q} \vee q$$

$$\Leftrightarrow \overline{p} \vee 1 \Leftrightarrow 1.$$

b) Ta có $F(p, q, r) = (p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow \overline{p \wedge q} \vee r$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \vee r \Leftrightarrow \bar{p} \vee (\bar{q} \vee r) \\ &\Leftrightarrow \bar{p} \vee (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Nhận xét. Nếu ta liên kết với dạng mệnh đề $(p \Rightarrow q)$ với lệnh “If p then q ” trong một số ngôn ngữ lập trình như Pascal, Basic thì dạng mệnh đề $(p \wedge q \Rightarrow r)$ sẽ được liên kết với lệnh “If $(p \Rightarrow q)$ then r còn dạng mệnh đề $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ sẽ được liên kết với lệnh If p then If q then r .

1.3. Quy tắc suy diễn

Trong chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p_1, p_2, \dots, p_n$ gọi là tiền đề, ta áp dụng các quy tắc suy diễn để suy ra chân lí của một khẳng định q mà ta gọi là kết luận. Nói cách khác, các quy tắc suy diễn được áp dụng để suy ra q là hệ quả logic của $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$. Tức là dạng mệnh đề $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ là một hằng đúng, trong đó $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ là các dạng mệnh đề theo một số biến logic nào đó. Thường thì các biến logic không xuất hiện một cách tường minh mà được trừu tượng hóa từ các mệnh đề nguyên thủy.

Ví dụ 1.17. Giả sử ta có các tiền đề:

p_1 : Nếu An học chăm thì An đạt điểm cao môn Toán rồi rạc.

p_2 : Nếu An không đi chơi thì An học chăm.

p_3 : An trượt môn Toán rồi rạc.

Ta muốn dùng các quy tắc suy diễn để suy ra kết luận sau là đúng:

q : An hay đi chơi.

Muốn vậy ta trừu tượng hóa các mệnh đề nguyên thủy “An học chăm”, “An hay đi chơi”, “An đạt điểm cao môn Toán rồi rạc” thành các biến mệnh đề p, q, r . Như vậy các tiền đề bây giờ trở thành các dạng mệnh đề

$$p_1 = p \Rightarrow r$$

$$p_2 = \bar{q} \Rightarrow p$$

$$p_3 = \bar{r}$$

Ta phải chứng minh dạng mệnh đề sau là một hằng đúng:

$$\left[(p \Rightarrow r) \wedge (\bar{q} \Rightarrow p) \wedge \forall r \right] \Rightarrow q$$

Ta có thể kiểm tra dễ dàng dạng mệnh đề trên là một hàng đúng bằng cách lập bảng chân trị. Tuy nhiên, đây không phải là phương pháp tốt nếu số biến mệnh đề lớn. Một phương pháp khác là sử dụng các quy tắc suy diễn để chia bài toán thành các bước nhỏ, nghĩa là từ các tiên đề suy ra một số kết luận trung gian trước khi tiếp tục áp dụng các quy tắc suy diễn để suy ra kết luận.

1.3.1. Quy tắc Modus Ponens

Quy tắc: Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

Ví dụ 1.18. Nếu “Minh học chăm” thì “Minh đạt điểm cao môn Toán rời rạc”, mà “Minh học chăm”. Suy ra “Minh đạt điểm cao môn Toán rời rạc”.

Quy tắc Modus Ponens (Phương pháp khẳng định) thường được áp dụng cùng với quy tắc thay thế để đơn giản hóa các bước suy luận.

Ví dụ 1.19. Phép suy diễn $\left((s \vee r) \Rightarrow (\bar{t} \wedge u) \right) \wedge (s \vee r) \Rightarrow (\bar{t} \wedge u)$ có được bằng cách thay p bởi $(s \vee r)$ và q bởi $(\bar{t} \wedge u)$.

1.3.2. Tam đoạn luận

Quy tắc: Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng

$$\left[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Ví dụ 1.20. $(p \Rightarrow q)$: Hai tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau thì chúng có một cạnh bằng nhau kèm giữa hai góc bằng nhau.

$(q \Rightarrow r)$: Hai tam giác có một cạnh bằng nhau kèm giữa hai góc bằng nhau thì chúng bằng nhau.

$(p \Rightarrow r)$: Suy ra hai tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau thì chúng bằng nhau.

Ví dụ 1.21. Xét tam đoạn luận

$(p \Rightarrow q)$: Một con ngựa rẻ thì hiếm

$(q \Rightarrow r)$: Cái gì hiếm thì đắt

$(p \Rightarrow r)$: Suy ra một con ngựa rẻ thì đắt

Tam đoạn luận trên hoàn toàn hợp logic. Tuy nhiên kết luận mâu thuẫn là do dựa trên một tiền đề sai (!).

Ví dụ 1.22. Xét ví dụ trong đó sử dụng cả hai quy tắc trên

$(p \Rightarrow \bar{q})$: Bình đi chơi thì Bình không học Toán rồi rạc

$(\bar{q} \Rightarrow r)$: Bình không học Toán rồi rạc thì Bình thi trượt môn Toán rồi rạc

p : Mà Bình thích đi chơi

r : Vậy Bình trượt Toán rồi rạc.

Khi đó ta có

$$\left[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{q} \Rightarrow r) \right] \wedge p \Rightarrow r$$

1.3.3. Quy tắc Modus Tollens

Quy tắc: Quy tắc này còn gọi là phương pháp phủ định được thể hiện bởi hằng đúng

$$\left[(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q} \right] \Rightarrow \bar{p}$$

Ví dụ 1.23. Xét phép suy diễn

$$\left\{ \left[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \right] \wedge (t \vee \bar{s}) \wedge (\bar{t} \vee u) \wedge \bar{u} \right\} \Rightarrow \bar{p}$$

Ta có thể suy luận như sau: ta thay các tiền đề $(t \vee \bar{s})$ và $(\bar{t} \vee u)$ bởi các dạng mệnh đề tương đương $s \Rightarrow t$ và $t \Rightarrow u$. Khi đó

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \right] \wedge (t \vee \bar{s}) \wedge (\bar{t} \vee u) \wedge \bar{u} \right\} \Rightarrow \bar{p} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \left[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \right] \wedge (s \Rightarrow t) \wedge (t \Rightarrow u) \wedge \bar{u} \right\} \Rightarrow \bar{p} \end{aligned}$$

1.3.4. Tam đoạn luận rời

Quy tắc: Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng

$$\left[(p \vee q) \wedge \bar{p} \right] \Rightarrow q$$

Ý nghĩa của quy tắc này là khi có đúng hai trường hợp có thể xảy ra và một trong hai trường hợp sai thì trường hợp còn lại đúng.

1.3.5. Quy tắc mâu thuẫn

Quy tắc mâu thuẫn (Chứng minh bằng phản chứng)

Quy tắc: Ta có tương đương logic

$$\left[p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q \right] \Leftrightarrow \left[p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge \bar{q} \Rightarrow 0 \right]$$

Do đó nếu chứng minh được dạng mệnh đề ở bên phải là một hằng đúng thì dạng mệnh đề ở bên trái cũng là một hằng đúng. Nói cách khác nếu thêm giả thiết phụ $\bar{q}$ vào các tiên đề cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì q là hệ quả logic của các tiên đề cho trước.

Ví dụ 1.24. Chứng minh suy diễn sau bằng phương pháp phản chứng:

$$\left[(p \Rightarrow r) \wedge (\bar{p} \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \right] \Rightarrow (\bar{r} \Rightarrow s)$$

Phủ định của kết luận sẽ tương đương với:

$$\overline{\bar{r} \Rightarrow s} \Leftrightarrow \overline{r \vee s} \Leftrightarrow \bar{r} \wedge \bar{s}$$

Như thế ta thêm vào các tiên đề hai giả thiết phụ $\bar{r}$ và $\bar{s}$ và tìm cách chứng minh suy luận sau là đúng:

$$\left[(p \Rightarrow r) \wedge (\bar{p} \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \right] \wedge \bar{r} \wedge \bar{s} \Rightarrow 0$$

Ta có

$$(\bar{p} \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \Rightarrow (\bar{p} \Rightarrow s) \Leftrightarrow (\bar{p} \Rightarrow s) \wedge \bar{s} \Rightarrow \bar{p} \Leftrightarrow p$$

Nên $(p \Rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$. Vậy $r \wedge \bar{r} \Rightarrow 0$. Vậy theo phương pháp phản chứng, chứng minh ban đầu là đúng.

1.3.6. Quy tắc chứng minh theo trường hợp

Quy tắc: Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng sau:

$$\left[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \right] \Rightarrow \left[(p \vee q) \Rightarrow r \right]$$

Ý nghĩa của quy tắc này là nếu một giả thiết có thể tách thành hai trường hợp p đúng hay q đúng và ta đã chứng minh được cho từng trường hợp là kết luận r đúng, khi ấy r cũng đúng trong cả hai trường hợp.

Ví dụ 1.25. Để chứng minh rằng $f(n) = n^3 + 2n$ luôn luôn chia hết cho 3 ta viết $f(n) = n(n^2 + 2)$ và lấy n là một số nguyên tùy ý. Khi ấy có hai trường hợp xảy ra:

Nếu n chia hết cho 3 thì hiển nhiên $f(n)$ cũng chia hết cho 3.

Nếu n không chia hết cho 3, thì ta viết $n = 3k \pm 1$ với một số nguyên k nào đó. Ta có $n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1)$

Suy ra $f(n) = n(n^2 + 2)$ cũng chia hết cho 3. Như vậy trong mọi trường hợp $f(n)$ chia hết cho 3.

1.4. Vị từ và lượng từ

1.4.1. Vị từ

Trong toán học hay trong chương trình của máy tính, chúng ta thường gặp những câu có chứa các biến như: “ $x > 3$ ”, “ $x = y + 3$ ”, “ $x + y = z$ ”,... Các câu này không đúng cũng không sai vì các biến chưa được gán cho những giá trị xác định.

Định nghĩa 1.7. Một vị từ là một khẳng định $p(x, y, \dots)$ trong đó có chứa một số biến $x, y, \dots$ lấy giá trị trong những tập hợp $A, B, \dots$ cho trước, sao cho:

- Bản thân $p(x, y, \dots)$ không phải là mệnh đề.
- Nếu thay $x, y, \dots$ bằng những giá trị cụ thể thuộc tập hợp $A, B, \dots$ cho trước ta được một mệnh đề $p(x, y, \dots)$, nghĩa là khi đó chân trị của $p(x, y, \dots)$ hoàn toàn xác định. Các biến $x, y, \dots$ được gọi là các biến tự do của vị từ.

Ví dụ 1.26. Các câu có liên quan đến các biến như: “ $x > 3$ ”, “ $x + y = 5$ ” chưa xác định được đúng hay sai vì các biến chưa được cho những giá trị xác định.

Nói cách khác, vị từ có thể xem là một hàm mệnh đề có nhiều biến hoặc không có biến nào. Nó có thể đúng hoặc sai tùy thuộc vào giá trị của biến và lập luận của vị từ.

Ví dụ 1.27. $p(n) = “n \text{ là chẵn}”$ là một vị từ. Nhưng, khi cho n là một số cụ thể là chẵn hay lẻ ta được một mệnh đề: $n = 2 : p(2)$ là mệnh đề đúng, $n = 5 : p(5)$ là mệnh đề sai.

Vị từ $p(n)$ có hai phần. Phần thứ nhất là biến n (là chủ ngữ của câu). Phần thứ hai “là chẵn” (cũng được gọi là vị từ) nó cho biết tính chất mà chủ ngữ có thể có.

Tổng quát, người ta nói $p(n)$ là giá trị của hàm mệnh đề p tại n . Một khi biến n được gán giá trị thì $p(n)$ là một mệnh đề.

Ví dụ 1.28. Cho vị từ $p(x) = “x > 3”$. Xác định chân trị của $p(4)$ và $p(2)$.

Giải: $p(4) = “4 > 3”$ là mệnh đề đúng, $p(2) = “2 > 3”$ là mệnh đề sai.

Chú ý: Ta có thể xem vị từ như là một ánh xạ p , với mỗi phần tử x thuộc tập hợp E ta được một ảnh $p(x) \in \{0, 1\}$. Tập hợp E này được gọi là không gian của vị từ. Không gian này sẽ chỉ rõ các giá trị khả dĩ của biến x làm cho $p(x)$ trở thành mệnh đề đúng hoặc sai.

1.4.2. Phép toán vị từ

Phép toán vị từ sử dụng các phép toán logic mệnh đề và là sự mở rộng của phép toán mệnh đề để thể hiện rõ hơn các tri thức.

Định nghĩa 1.8. Cho trước các vị từ $p(x)$, $q(x)$ theo một $x \in A$. Khi đó

i) Phủ định của p (kí hiệu là $\overline{p}$) là vị từ mà khi thay x bằng phần tử a cố định của A thì ta được mệnh đề $\overline{p(a)}$.

ii) Phép hội của p và q (kí hiệu bởi $p \wedge q$) là vị từ mà khi thay x bằng phần tử a cố định của A thì ta được mệnh đề $p(a) \wedge q(a)$.

iii) Phép tuyển của p và q (kí hiệu bởi $p \vee q$) là vị từ mà khi thay x bằng phần tử a cố định của A thì ta được mệnh đề $p(a) \vee q(a)$.

iv) Phép kéo theo của p và q (kí hiệu bởi $p \Rightarrow q$) là vị từ mà khi thay x bằng phần tử a cố định của A thì ta được mệnh đề $p(a) \Rightarrow q(a)$.

1.4.2. Các lượng từ

Giả sử $p(x)$ là vị từ theo biến x , khi đó có 3 trường hợp xảy ra

Trường hợp 1: Khi thay x bằng phần tử tùy ý a trong A ta được mệnh đề đúng $p(a)$.

Trường hợp 2: Với một số giá trị của a trong A thì $p(a)$ là mệnh đề đúng, một số giá trị b trong A thì $p(b)$ là mệnh đề sai.

Trường hợp 3: Khi thay x bằng phần tử tùy ý a trong A ta được mệnh đề sai $p(a)$.

Nếu Trường hợp 1 xảy ra thì mệnh đề “với mọi $x \in A$, $p(x)$ ” là mệnh đề đúng. Mệnh đề này được kí hiệu: “ $\forall x \in A, p(x)$ ”. Mệnh đề này là sai nếu xảy ra Trường hợp 2 và Trường hợp 3.

Mặt khác nếu Trường hợp 1 hay Trường hợp 2 xảy ra thì mệnh đề “tồn tại $x \in A$, $p(x)$ ” là mệnh đề đúng. Mệnh đề này được kí hiệu: “ $\exists x \in A, p(x)$ ”. Mệnh đề này là sai nếu xảy ra Trường hợp 3.

Định nghĩa 1.9. Các mệnh đề “ $\forall x \in A, p(x)$ ” và “ $\exists x \in A, p(x)$ ” được gọi là *lượng từ hóa* của vị từ $p(x)$ bởi lượng từ với mọi ($\forall$) và lượng từ tồn tại ($\exists$).

Chú ý: Trong các mệnh đề lượng từ hóa, biến x không còn là biến tự do nữa. Nó đã bị buộc bởi các lượng từ $\forall, \exists$.

Theo nhận xét trên, phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in A, p(x)$ ” là đúng nếu xảy ra Trường hợp 2 và Trường hợp 3 xảy ra. Trường hợp 3 có thể viết lại: khi thay x bởi a tùy ý thuộc A thì $\overline{p(a)}$ đúng. Do đó nếu Trường hợp 2 hay Trường hợp 3 xảy ra thì mệnh đề “ $\exists x \in A, p(x)$ ” là mệnh đề đúng. Tức là phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in A, p(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in A, \overline{p(x)}$ ” và phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in A, p(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in A, \overline{p(x)}$ ” vì cả hai cùng đúng nếu Trường hợp 3 xảy ra và cùng sai nếu Trường hợp 1 hay Trường hợp 2 xảy ra.

Xét vị từ theo hai biến $p(x, y), x \in A, y \in B$. Khi đó nếu thay x bằng một phần tử cố định $a \in A$ thì $p(a, y)$ trở thành một vị từ theo biến $y \in B$ nên ta cũng có thể lượng từ hóa nó theo biến y và được hai mệnh đề “ $\forall y \in B, p(a, y)$ ” và “ $\exists y \in B, p(a, y)$ ”. Bằng cách này ta được hai vị từ theo một biến $x \in A$ là “ $\forall y \in B, p(x, y)$ ” và “ $\exists y \in B, p(x, y)$ ”. Nếu lượng từ hóa ta được bốn mệnh đề theo biến x trước, biến y sau

$$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$$

$$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$$

$$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$$

$$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$$

Và bốn mệnh đề theo biến y trước, biến x sau.

$$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$$

$$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$$

$$\exists y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$$

$$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$$

Định lý 1.2. Nếu $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y thì các mệnh đề sau là đúng:

$$\text{i) } \left[\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y) \right] \Leftrightarrow \left[\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y) \right]$$

$$\text{ii) } \left[\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y) \right] \Leftrightarrow \left[\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y) \right]$$

$$\text{iii) } \left[\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y) \right] \rightarrow \left[\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y) \right]$$

Chứng minh: i) Ta giả sử mệnh đề $\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$ đúng, khi đó thay x bởi a tùy ý thuộc A , thay y bởi b tùy ý thuộc B ta được mệnh đề đúng $p(a, b)$ nên mệnh đề $\forall y \in B, p(a, y)$ cũng đúng. Suy ra mệnh đề $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ đúng. Chứng minh chiều ngược lại tương tự.

ii) Chứng minh tương tự.

iii) Ta giả sử mệnh đề $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ đúng, khi đó tồn tại a thuộc A sao cho mệnh đề $\forall y \in B, p(a, y)$ đúng. Nghĩa là nếu thay $y = b \in B$ thì $p(a, b)$ đúng. Suy ra với $y = b \in B$ ta có thể chọn $x = a$ để $\exists x \in A, p(x, b)$ đúng. Do đó $\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$ là một mệnh đề đúng (đpcm).

Chú ý. - Mệnh đề đảo của iii) không đúng. Thật vậy, ta xét ví dụ. Cho $p(x, y)$ là vị từ theo hai biến thực x, y : $p(x, y) = "x + y = 1"$.

Khi đó nếu thay $y = b$ thì luôn tồn tại $x = 1 - b$ để $x + y = 1$. Do đó mệnh đề $\exists x \in \mathbb{R}, x + b = 1$ là đúng. Tức là mệnh đề $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y = 1$ là đúng. Ngược lại nếu thay $x = a$ thì ta có thể chọn $y = -a$ để $x + y = 0 \neq 1$ nên mệnh đề $\forall y \in \mathbb{R}, a + y = 1$ là sai. Tức là mệnh đề $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 1$ là sai.

Các kết quả trên có thể được mở rộng trong trường hợp vị từ nhiều biến tự do. Đặc biệt ta có.

Mệnh đề 1.2. Trong một mệnh đề lượng từ hóa từ một vị từ theo nhiều biến độc lập nếu ta hoán vị hai biến đứng cạnh nhau thì

i) Mệnh đề mới sẽ tương đương với mệnh đề ban đầu nếu hai lượng từ có dạng $\exists, \forall$.

ii) Mệnh đề mới sẽ là một hệ quả logic của mệnh đề ban đầu nếu hai lượng từ này cùng loại.

Định lý 1.3. Phủ định của một mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ $p(x, y, z, \dots)$ có được bằng cách thay lượng từ $\forall$ bởi lượng từ $\exists$, thay lượng từ $\exists$ bởi lượng từ $\forall$ và vị từ $p(x, y, z, \dots)$ bởi phủ định $\overline{p(x, y, z, \dots)}$.

Thông thường các định lý trong toán học được phát biểu liên quan đến các mệnh đề lượng từ hóa trong đó có lượng từ với mọi ($\forall$). Do đó, ngoài các quy tắc suy diễn ta còn sử dụng quy tắc sau

Quy tắc đặc biệt hóa với mọi: Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hóa trong đó có biến x thuộc A bị buộc bởi lượng từ với mọi ($\forall$). Khi đó nếu thay x bởi a thuộc A ta được một mệnh đề đúng.

1.5. Nguyên lý quy nạp

1.5.1. Chứng minh quy nạp

Giả sử cần tính tổng n số nguyên lẻ đầu tiên. Với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ta có:

$$n = 1: 1 = 1 = 1^2$$

$$n = 2: 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$n = 3: 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$n = 4: 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$n = 5: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Từ các kết quả này ta dự đoán tổng n số nguyên lẻ đầu tiên là n^2 . Tuy nhiên, chúng ta cần có phương pháp chứng minh dự đoán trên là đúng.

Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh rất quan trọng. Người ta dùng nó để chứng minh những kết quả đã có dựa trên sự suy luận nào đó như ví dụ trên. Tuy nhiên, quy nạp toán học chỉ dùng để chứng minh các kết quả nhận được bằng một cách nào đó chứ không là công cụ để phát hiện ra công thức.

1.5.2. Nguyên lý chứng minh quy nạp yếu

Xét định lý có dạng $p(n)$ là đúng $\forall n$ nguyên dương, trong đó $p(n)$ là hàm mệnh đề, kí hiệu $\forall n : p(n)$. Quy nạp toán học là một kỹ thuật dùng để chứng minh các định lý thuộc dạng này. Nói cách khác, quy nạp toán học thường sử dụng để chứng minh các mệnh đề dạng $\forall n : p(n)$.

Nguyên lý chứng minh quy nạp yếu gồm hai bước:

Bước 1: Kiểm tra $p(k_0)$ là đúng với k_0 là giá trị đầu tiên của dãy số n .

Bước 2: Giả sử rằng $p(n)$ là đúng khi $n = k$. Từ đó suy ra rằng $p(k+1)$ là đúng.

Ta có cách viết của suy luận trên như sau:

$$\left[p(k_0) \wedge p(k) \Rightarrow p(k+1) \right] \Rightarrow \left[\forall n : p(n) \right]$$

Ví dụ 1.29. Chứng minh rằng

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.2)$$

Giải: Đặt $p(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Ta chứng minh $p(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Với $n = 1$, ta có $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ suy ra (1.2) là đúng.

Giả sử (1.2) đúng khi $n = k$. Ta có

$$p(k) = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ta chứng minh với $n = (k+1)$ thì (1.2) cũng đúng. Nghĩa là

$$p(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
p(k+1) &= 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (\text{đpcm})
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.30. Chứng minh bất đẳng thức: $n < 2^n$ với n nguyên dương.

Giải. Khi $n = 1$, ta có $1 < 2$ (đúng).

Giả sử bất đẳng thức đúng khi $n = k$, ta có $k < 2^k$. Cần chứng minh rằng $k+1 < 2^{k+1}$. Thật vậy, vì

$$k < 2^k \Rightarrow k+1 < 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Do đó, $n < 2^n$ với n nguyên dương.

Chú ý: Khi sử dụng nguyên lý chứng minh quy nạp, không được bỏ qua bước kiểm tra $p(k_0)$ là đúng vì nếu chỉ có $p(n) \rightarrow p(n+1)$ là không đủ để kết luận rằng $\forall n : p(n)$ là đúng.

Ví dụ 1.31. Chứng minh rằng

$$S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (1.3)$$

Chứng minh: Giả sử (1.3) đúng khi $n = k$. Ta có

$$p(k) = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ta chứng minh với $n = (k+1)$ thì (1.3) cũng đúng.

Nghĩa là $p(k+1) = \frac{(k+2)(k+3)}{2}$. Thật vậy:

$$\begin{aligned}
p(k+1) &= 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + k + 1 \\
&= \frac{k^2 - 2k + 3k - 6 + 2k + 2}{2} \\
&= \frac{k^2 + 3k - 4}{2} \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Ta có $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ là đúng. Tuy nhiên khi xét $p(0) = 0 = 3$ ta được mệnh đề sai. Vậy $\forall n : p(n)$ là mệnh đề sai.

Chú ý: Có nhiều phương pháp tính giá trị của một biểu thức phụ thuộc n . Một trong số đó là đoán ra kết quả. Sau đó, sử dụng nguyên lý chứng minh quy nạp để chứng minh rằng kết quả vừa tìm được là đúng.

Ví dụ 1.32. Tính tổng n số lẻ đầu tiên:

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

Giải: Khi $n = 1$: $S = 1 = 1^2$

$$\text{Khi } n = 2: S = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$\text{Khi } n = 3: S = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$\text{Khi } n = 4: S = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$\text{Khi } n = 5: S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

...

Vậy có thể dự đoán rằng $S = n^2$

Sau đó sử dụng chứng minh quy nạp yếu để chứng minh kết quả vừa tìm được.

Đặt

$$p(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1), \quad p(n) = n^2 \quad (1.4)$$

Khi $n = 1$, ta có $1 = 1$, (1.4) là đúng.

Giả sử rằng (1.4) là đúng khi $n = k$. Ta có:

$$p(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Ta chứng minh (1.4) đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là:

$$p(k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Thật vậy, về trái

$$\begin{aligned} p(k+1) &= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1). \\ &= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Vậy $\forall n : p(n)$.

1.5.3. Nguyên lý chứng minh quy nạp mạnh

Cho $p(n)$ là một đẳng thức có chứa biến n , nếu $p(0)$ đúng và

$$p(0) \wedge p(1) \wedge p(2) \wedge \dots \wedge p(k) \rightarrow p(k+1)$$

đúng thì $p(n)$ là mệnh đề đúng $\forall n$ (với 0 là phần tử đầu tiên).

Chú ý: Trong nguyên lý quy nạp yếu chỉ cần giả thiết $p(k)$ là đúng. Ngược lại, trong nguyên lý quy nạp mạnh, ta cần giả thiết đúng cho tất cả các mệnh đề

$$p(0) \wedge p(1) \wedge p(2) \wedge \dots \wedge p(k).$$

Đây chính là sự khác biệt cơ bản của hai nguyên lý quy nạp.

Ví dụ 1.33. Chứng minh rằng tích của ba số liên tiếp luôn chia hết cho 6.

Chứng minh: Đặt $p(n) = “n(n+1)(n+2) \text{ chia hết cho } 6”$ (n nguyên dương).

Ta có: $p(1) = “1.2.3 \text{ chia hết cho } 6”$ là mệnh đề đúng.

$p(2) = “2.3.4 \text{ chia hết cho } 6”$ là mệnh đề đúng.

$p(3) = “3.4.6 \text{ chia hết cho } 6”$ là mệnh đề đúng.

...

Giả sử $\forall n \leq k$ ta có $p(k)$ là đúng. Nghĩa là: $k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 6. Ta chứng minh rằng $p(k+1)$ là đúng. Thật vậy, ta có:

$$(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)$$

trong đó: $k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 6. Và $3(k+1)(k+2)$ chia hết cho 6 (vì $(k+1)(k+2)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2).

Vì tổng của hai số chia hết cho 6 sẽ chia hết cho 6, do đó $(k+1)(k+2)(k+3)$ chia hết cho 6. Vậy $p(n)$ đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 1.34. Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên lớn hơn 1, khi đó n có thể được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

Chứng minh: Đặt $p(n) = “n = a.b.c \text{ với } a, b, c \text{ là các số nguyên tố}”$. Ta có:

$p(2) = “2 = 2.1”$, $p(3) = “3 = 3.1”$, ..., $p(18) = “18 = 3.2.3”$ là các mệnh đề đúng.

Giả sử $p(n)$ đúng $\forall n \geq 2$ ta có $p(k)$ đúng. Cần chứng minh rằng $p(k+1)$ là đúng. Thật vậy, với $n = k+1$ ta có hai trường hợp xảy ra:

Nếu $k+1$ là số nguyên tố khi đó vì $k+1 = (k+1).1$ nên $p(k+1)$ đúng.

Nếu $k+1$ không là số nguyên tố (hợp số): $k+1 = a.b$, $a, b \in [2, k]$. Theo giả thiết quy nạp mạnh, a, b có thể là số nguyên tố hoặc là tích của các số nguyên tố. Vậy nếu $k+1$ là hợp số thì nó cũng sẽ được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố. Tức là $p(n)$ đúng với mọi $n \geq 2$.

1.6. Các nguyên lý đếm

1.6.1. Nguyên lý cộng

Để đếm các phần tử của một tập hợp ta thực hiện bốn bước sau:

Bước 0: Nếu $A = \emptyset$ ta có số phần tử của A bằng 0.

Bước 1: Nếu $A \neq \emptyset$, khi đó tồn tại một phần tử $a \in A$. Bằng cách gán a tương ứng với phần tử $1 \in \mathbb{N}$ và nếu $A = \{a\}$ thì A có một phần tử.

Bước 2: Nếu $A \neq \{a\}$, khi đó tồn tại một phần tử $b \in A$, $b \neq a$. Bằng cách gán b tương ứng với phần tử $2 \in \mathbb{N}$ khi đó ta có một song ánh $\{a, b\} \leftrightarrow \{1, 2\}$ và nếu $A = \{a, b\}$ ta nói A có hai phần tử.

Bước 3: Cứ tiếp tục thủ tục như trên ta có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1: Quá trình đếm dừng ở một bước n nào đó, nghĩa là tồn tại một song ánh giữa A và $\{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Khi đó ta nói rằng A có n phần tử.

Trường hợp 2: Quá trình đếm không bao giờ dừng. Tức là A có vô số phần tử hay A là một tập hợp vô hạn.

Định nghĩa 1.10. i) Tập hợp A được gọi là hữu hạn và có n phần tử nếu tồn tại một song ánh giữa A và tập hợp con $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ của $\mathbb{N}$. Ta viết $|A| = n$.

ii) Nếu A không hữu hạn, ta nói A vô hạn

Chú ý. Nếu hai tập hợp hữu hạn A, B có cùng số phần tử (A và B có cùng lực lượng) thì có sự tương ứng 1 - 1 với nhau, tức là tồn tại một song ánh $A \leftrightarrow B$.

Định nghĩa 1.11. i) Một tập hợp A được gọi là có lực lượng bé hơn lực lượng của B nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B .

ii) Hai tập hợp A và B gọi là đồng lực lượng nếu có một song ánh $A \leftrightarrow B$.

Mệnh đề 1.3. Lực lượng của A nhỏ hơn lực lượng của B khi và chỉ khi tồn tại một toàn ánh từ B lên A .

Định lý 1.4. Giả sử A và B là 2 tập hợp hữu hạn. Nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B và một đơn ánh từ B vào A thì A và B có cùng số phần tử.

Chứng minh: Gọi f là một đơn ánh từ A vào B . Đặt $C = f(A)$ và $\overline{C}$ là phần bù của C trong B thì $|B| = |C| + |\overline{C}|$ (xem thêm Mệnh đề 1.4).

Do f là song ánh giữa A vào C nên

$$|B| = |C| + |\overline{C}| = |A| + |\overline{C}| \geq |A|$$

Tương tự nếu tồn tại một đơn ánh từ B vào A ta sẽ có $|B| \geq |A|$. Vậy $|B| = |A|$.

Nhận xét: Do $|\overline{C}| = 0$ nên $C = f(A) = B$, hay đơn ánh từ A vào B trong Định lý 1.4. cũng là song ánh (vì nó là toàn ánh).

Mệnh đề 1.4 (Nguyên lý cộng): Giả sử B là tập hợp con của tập hợp hữu hạn A . Gọi $\overline{B}$ là phần bù của B trong A . Khi đó ta có: $|A| = |B| + |\overline{B}|$

Chứng minh: Gọi m, n lần lượt là số phần tử của B và $\overline{B}$. Khi đó tồn tại một song ánh f từ B lên $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ và một song ánh g từ $\overline{B}$ lên $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Ta định nghĩa ánh xạ h từ A vào $\{1, 2, 3, \dots, m+n\}$ như sau:

+ Nếu $x \in B$ ta đặt $h(x) = f(x)$

+ Nếu $x \in \overline{B}$ ta đặt $h(x) = g(x) + m$

Khi đó h là song ánh và $|A| = m + n$.

Ví dụ 1.35. Lớp Sư phạm Tin học và Công nghệ Tiểu học có 35 sinh viên đăng kí học môn Toán rời rạc và 30 sinh viên đăng kí học môn Xác suất thống kê ở học kì này. Hỏi có bao nhiêu sinh viên đăng kí học một trong hai môn biết rằng không có sinh viên nào học cả hai môn.

Gọi A là tập hợp các sinh viên đăng kí học môn Toán rời rạc và B là tập hợp các sinh viên đăng kí học môn Xác suất thống kê. Khi ấy tập hợp các sinh viên ghi tên học một trong hai môn là $A \cup B$. Do $A \cap B = \Phi$ nên B là phần bù của A trong $A \cup B$.

$$\text{Vậy } |A \cup B| = |A| + |B| = 35 + 30 = 65$$

Nhận xét: 1) Có hai nhóm sinh viên đăng kí học một trong hai môn: nhóm các sinh viên đăng kí học môn Toán rời rạc và nhóm các sinh viên đăng kí học môn Xác suất thống kê. Việc đếm sinh viên thuộc hai nhóm này loại trừ lẫn nhau theo nghĩa chúng không thể đồng thời xảy ra. Khi ấy ta cũng có thể phát biểu lại Mệnh đề 1.4 dưới dạng:

Nguyên lý cộng: Nếu một quá trình có thể được thực hiện bằng một trong hai cách loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho m kết quả và cách thứ hai cho n kết quả. Khi ấy việc thực hiện quá trình cho $m + n$ kết quả.

Chú ý: Trong Ví dụ 1.35, nếu có một số sinh viên (chẳng hạn 10) đăng kí học cả hai môn thì tập hợp $A \cap B \neq \Phi$ và có 10 phần tử. Khi đó $|A| + |B|$ không phải là số phần tử của $|A \cup B|$ vì $A \cap B \neq \Phi$ được tính hai lần trong $|A|$ và $|B|$. Do đó ta có dạng mở rộng của nguyên lý cộng là:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 35 + 30 - 10 = 55$$

Định nghĩa 1.12. Ta nói n tập hợp $C_1, C_2, \dots, C_n$ là đôi một rời nhau nếu $C_i \cap C_j = \Phi, \forall i \neq j$.

Mệnh đề 1.5 (Nguyên lý cộng mở rộng). Nếu tập hợp hữu hạn C có thể viết như là tập hợp $C_1, C_2, \dots, C_n$ đôi một rời nhau thì

$$|C| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_n|$$

Để chứng minh ta sử dụng Mệnh đề 1.4 và Nguyên lý quy nạp.

1.6.2. Nguyên lý nhân:

Nếu thực hiện hành động H phải trải qua hai giai đoạn liên tiếp độc lập với nhau. Giả sử giai đoạn 1 có m cách thực hiện khác nhau và với mỗi cách thực hiện trong giai đoạn 1 đều có n cách khác nhau để thực hiện giai đoạn 2. Khi ấy có $m \times n$ cách khác nhau để thực hiện toàn bộ hành động H .

Chú ý: Hai giai đoạn thực hiện được gọi là độc lập với nhau nếu hai cách thực hiện (a, b) và (c, d) cho hai kết quả khác nhau. Tức là một trong hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1: $a \neq c$ (hai cách thực hiện giai đoạn 1 khác nhau).

Trường hợp 2: $\begin{cases} a = c \\ b \neq d \end{cases}$ (khi hai cách thực hiện giai đoạn 1 giống nhau thì hai cách

thực hiện giai đoạn 2 phải khác nhau).

Ví dụ 1.36. Biển số xe ô tô của Đà Nẵng có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chuỗi gồm năm chữ số thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Hỏi Đà Nẵng có thể có bao nhiêu biển số xe ô tô khác nhau?

Giải: Gọi $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ là một biển số xe ô tô của Đà Nẵng.

Ta có: 26 cách chọn chữ cái để xếp ở vị trí đầu tiên a_1 .

Có 10 cách chọn chữ số cho mỗi vị trí trong năm vị trí còn lại a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 .

Theo quy tắc nhân, ta có tất cả $26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,600\,000$ (biển số).

Nhận xét: Trong Ví dụ 1.36, gọi A là tập hợp các chữ cái trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh và B là tập hợp các chuỗi gồm năm chữ số thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Khi đó một biển số xe ô tô là một cặp có thứ tự (a, b) với $a \in A, b \in B$. Tập hợp các biển số xe ô tô của Đà Nẵng là tích Descartes $A \times B$.

Định nghĩa 1.13. Tích Descartes của hai tập hợp A, B kí hiệu bởi $A \times B$ là tập hợp tất cả các cặp thứ tự (a, b) với $a \in A, b \in B$, trong đó hai cặp (a, b) và (a', b') được nói là bằng nhau khi và chỉ khi $a = a', b = b'$.

Định lý 1.5. Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì $A \times B$ cũng là một tập hợp hữu hạn, và ta có: $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Chứng minh: Quá trình đếm các phần tử của $A \times B$ được thực hiện theo hai giai đoạn: có $|A|$ cách khác nhau để chọn một phần tử tùy ý của A và với mỗi cách chọn phần tử $a \in A$, có $|B|$ cách chọn một phần tử tùy ý $b \in B$ để tạo thành các cặp khác nhau (a, b) . Do đó theo Nguyên lý nhân có $|A| \times |B|$ cách chọn các cặp (a, b) khác nhau. Vậy $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Để xác định một song ánh cụ thể từ $|A| \times |B|$ lên $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$, trong đó $m = |A|, n = |B|$ ta xây dựng từ các song ánh:

$$f : A \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\} \text{ và } g : B \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Cụ thể, đặt

$$h : A \times B \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, mn\}, h(a, b) = (g(b) - 1) \times m + f(a)$$

Kiểm tra h là đơn ánh:

Giả sử $h(a, b) = h(a', b')$. Khi đó:

$$(g(b) - 1) \times m + f(a) = (g(b') - 1) \times m + f(a')$$

Giả sử $f(a') \leq f(a)$ suy ra $f(a) - f(a') = (g(b') - g(b))m \geq 0$. Nhưng

$$0 \leq f(a) - f(a') < m \text{ và } (g(b') - g(b))m > m$$

nếu $g(b') - g(b) > 0$. Vậy $f(a) = f(a')$ và $g(b') - g(b) = 0$. Do đó $(a, b) = (a', b')$.

Hay h là đơn ánh.

Kiểm tra h là toàn ánh.

Giả sử k là một số nguyên bất kì sao cho $1 \leq k \leq mn$. Gọi i là số nguyên lớn nhất sao cho $mi < k$. Khi đó $mi < k \leq m(i + 1)$ nên

$$1 \leq j = k - mi \leq m \text{ và } 1 \leq i \leq \frac{k}{m} \leq \frac{mn}{m} = n$$

Đặt $a = f^{-1}(j)$ và $b = g^{-1}(i+1)$, ta được:

$$h(a, b) = (gg^{-1}(i+1) - 1) \times m + ff^{-1}(j) = im + j = k$$

Vậy h là một song ánh.

Chú ý: f^{-1} và g^{-1} cho phép viết A và B dưới dạng $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$. Ta nói các phần tử của A (tương ứng B) đã được đánh chỉ số bởi f^{-1} (tương ứng g^{-1}).

Tức là ánh xạ h có thể viết: $h(a_i, b_j) = (j-1)m + i$. Nói cách khác ta đã “đếm” các phần tử của $A < B$ theo n mảng đặt kế tiếp nhau:

$$\begin{aligned} & \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), \dots, (a_m, b_1)\} \\ & \{(a_1, b_2), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_2)\} \\ & \dots\dots \\ & \{(a_1, b_n), (a_2, b_n), \dots, (a_m, b_n)\}. \end{aligned}$$

Gọi các mảng này lần lượt là $C_1, C_2, \dots, C_n$ và chúng đều tương ứng 1 - 1 với A nên có cùng số phần tử là m . Hơn nữa các tập hợp này đôi một rời nhau nên ảnh của h có $m \times n$ phần tử và do đó h là song ánh.

Định nghĩa 1.14. Cho n tập hợp không rỗng $A_1, A_2, \dots, A_n$.

i) Một bộ n phần tử là một họ phần tử có dạng $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ với $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_3 \in A_3, \dots, a_n \in A_n$.

ii) Hai bộ $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, $(a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n)$ được gọi là bằng nhau nếu $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, $a_3 = a'_3, \dots, a_n = a'_n$.

iii) Tập hợp tất cả các bộ n phần tử được gọi là tích Descartes của $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ và kí hiệu bởi $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ là:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, \dots, a_n \in A_n\}$$

Chú ý: Ta cũng kí hiệu tích Descartes bởi $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$.

Định lí 1.6. Nếu $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ hữu hạn thì $\prod_{i=1}^n A_i$ hữu hạn và ta có

$$\left| \prod_{i=1}^n A_i \right| = |A_1| |A_2| |A_3| \dots |A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

Áp dụng Định lí 1.5 và nguyên lí quy nạp ta dễ dàng chứng minh được định lí trên.

Ví dụ 1.37. Tập thể lớp Sư phạm Tin học và Công nghệ Tiểu học cần bầu ra một Ban cán sự lớp gồm một sinh viên Tổ 1, một sinh viên Tổ 2, một sinh viên Tổ 2, một sinh viên Tổ 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra Ban cán sự lớp biết rằng Tổ 1 có 22 sinh viên, Tổ 2 có 24 sinh viên, Tổ 3 có 23 sinh viên và Tổ 4 có 21 sinh viên?

Gọi A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt là tập hợp các sinh viên của Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 và Tổ 4.

Khi đó Ban cán sự là một bộ bốn thành phần: $(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, a_4 \in A_4$.

Do đó theo Định lí 1.6 số cách chọn Ban cán sự là

$$\left| \prod_{i=1}^4 A_i \right| = |A_1| |A_2| |A_3| |A_4| = \prod_{i=1}^4 |A_i| = 22 \times 24 \times 23 \times 21 = 255024$$

1.6.3. Chính hợp, tổ hợp, tổ hợp lặp

Cho hai tập hợp A và B , tập hợp tất cả các ánh xạ từ A vào B được kí hiệu bởi B^A . Giả sử $|A| = m$, ta viết: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Rõ ràng một ánh xạ f từ A vào B được hoàn toàn xác định bằng cách chọn ra m phần tử:

$$\begin{aligned} b_1 &= f(a_1) \\ b_2 &= f(a_2) \\ b_3 &= f(a_3) \\ &\dots \\ b_m &= f(a_m) \end{aligned}$$

Nói cách khác ở được xác định bởi bộ m thành phần

$$\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_m)\} \in B^m$$

Như vậy ta được một ánh xạ:

$$\varphi : B^A \rightarrow B^m, \text{ với } \varphi(f) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)) \quad (1.5)$$

Ngược lại cho trước $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in B^m$ thì ta định nghĩa được một ánh xạ duy nhất ở $f \in B^m$ bởi:

$$\begin{aligned} f(a_1) &= b_1 \\ f(a_2) &= b_2 \\ f(a_3) &= b_3 \\ &\dots \\ f(a_m) &= b_m \end{aligned}$$

Tức là ta đã chứng minh mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.6. Giả sử $|A| = m$ với $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ thì $\varphi: B^A \rightarrow B^m$, với $\varphi(f)(a_1, a_2, \dots, a_m) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m))$ xác định một song ánh giữa B^A và B^m . Đặc biệt nếu B hữu hạn thì B^A cũng hữu hạn và ta có: $|B^A| = |B^m|$.

Chú ý: Trong phép tương ứng (1.5), f là một đơn ánh khi và chỉ khi các phần tử $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)$ là đôi một khác nhau. Từ đó ta có một quá trình m bước để đếm các đơn ánh từ A vào B :

Bước 1: Chọn tùy ý một phần tử $b_1 \in B$, có n cách chọn b_1 .

Bước 2: Chọn tùy ý một phần tử $b_2 \in B$ khác với b_1 , nghĩa là một phần tử $b_2 \in B \setminus \{b_1\}$. Ở đây $B \setminus \{b_1\}$ chỉ phần bù của b_1 trong B . Ta có $n - 1$ cách chọn b_2 .

Bước m : Chọn tùy ý một phần tử $b_m \in B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_{m-1}\}$.

Do $n - (m - 1) = n - m + 1$, nên có $n - m + 1$ cách chọn b_m .

Chú ý rằng để có thể tiến hành đến bước thứ m ta cần có $n - m + 1 \geq 1$ hay $n \geq m$. Do đó áp dụng nguyên lí nhân ta được kết quả trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.7. Giả sử $n \geq m$. Khi đó số đơn ánh từ A vào B là:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

Nếu $|A| = |B| = n$ thì ta có:

Hệ quả 1.1. Số song ánh từ A lên B là: $n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = n!$

Chứng minh: nếu $|A| = |B|$ thì mọi đơn ánh từ $|A|$ vào $|B|$ cũng là một song ánh.

Trong trường hợp $A = B$ thì một song ánh từ A lên chính nó còn được gọi là một phép hoán vị của A . Do đó Hệ quả 1 có thể được phát biểu lại:

Hệ quả 1.2. Số các phép hoán vị của một tập hợp có n phần tử là $n!$

Định nghĩa 1.15. Đặt $B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, khi đó ta có định nghĩa:

i) Một *chỉnh hợp chập m của n phần tử* là một phép chọn ra m phần tử *phân biệt* trong B theo một *thứ tự* nào đó.

ii) Một *tổ hợp chập m của n phần tử* là một phép chọn ra m phần tử *khác nhau* của B không kể thứ tự.

Định lý 1.7. Cho m, n là hai số tự nhiên, $m \leq n$. Khi đó ta có:

i) Số các chỉnh hợp chập m của n phần tử chọn m là:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

ii) Số các tổ hợp chập m của n phần tử là:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Chứng minh. i) Với $B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ thì một chỉnh hợp chập m của n phần tử chính là một bộ $\{b_1, b_2, \dots, b_m\} \in B^m$ đôi một khác nhau. Do đó số chỉnh hợp được cho bởi Mệnh đề 1.7.

ii) Ta sẽ tính số tổ hợp bằng cách đếm lại số chỉnh hợp theo một quá trình hai bước:

Bước 1: Chọn tùy ý một tổ hợp chập m của n phần tử, nói cách khác chọn ra một tập hợp con B' có m phần tử của B . Số cách chọn khác nhau chính là số tổ hợp C_n^m .

Bước 2: Với một tập hợp con B' , ta có thể chọn ra m phần tử phân biệt của B' theo một thứ tự nhất định: $(b_1, b_2, \dots, b_m)$. Số cách chọn chính là số phép hoán vị của B' nên bằng $m!$

Bằng hai bước trên ta đã đếm được tất cả các chỉnh hợp chập m của n phần tử nên:

$$A_n^m = C_n^m \times m!$$

Suy ra

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}$$

Chú ý. Ta thường kí hiệu số tổ hợp bởi $\binom{n}{m}$ và gọi là hệ số nhị thức. Hệ số nhị thức có thể đặt dưới dạng đối xứng:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) \times (n-m)!}{m! \times (n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Dưới dạng trên ta có: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

Định lí 1.8. Với $m \leq n$, ta có

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \quad (1.6)$$

Chứng minh. Ta sẽ chọn ra các tổ hợp chập m của $n+1$ phần tử bằng một trong hai cách loại trừ lẫn nhau.

Cách 1: Chọn ra một tập hợp con B' có m phần tử phân biệt trong $\{1, 2, \dots, n+1\}$ không chứa $n+1$. Rõ ràng B' cũng là một tập hợp con m phần tử của $\{1, 2, \dots, n\}$ nên có $\binom{n}{m}$ cách chọn.

Cách 2: Chọn ra một tập hợp con B'' có m phần tử phân biệt trong $\{1, 2, \dots, n+1\}$ chứa $n+1$. Rõ ràng $B'' \setminus \{n+1\}$ là một tập hợp con $m-1$ phần tử phân biệt của $\{1, 2, \dots, n+1\}$ nên có $\binom{n}{m-1}$ cách chọn.

Do đó theo nguyên lí cộng, số tổ hợp của $n+1$ phần tử chọn m thỏa (1.6) (đpcm).

Để hiểu rõ tại sao số tổ hợp còn được gọi là hệ số nhị thức, ta hãy chứng minh công thức dưới đây gọi là Công thức nhị thức Newton.

Định lí 1.9. Cho x, y là hai biến thực ta có

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}x^{n-m}y^m$$

Chứng minh. Ta hãy khai triển $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$ thành tổng của các số hạng có dạng $a_1a_2\dots a_n$ trong đó $a_i = x$ hay $a_i = y$; $1 \leq i \leq n$. Với $0 \leq m \leq n$ ta gộp tất cả các số hạng trong đó có đúng m thừa số bằng y . Các số hạng này đều có dạng $x^{n-m}y^m$. Hơn nữa số các số hạng như vậy chính là số cách chọn m phần tử phân biệt của $\{1, 2, \dots, n\}$. Đây là số tổ hợp $\binom{n}{m}$ nên ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 1.3. Ta có

$$\text{i) } 2^n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{m} + \dots + \binom{n}{n} \quad (1.7)$$

$$\text{ii) } 0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{m} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \quad (1.8)$$

Chú ý. Theo Nguyên lý cộng, vế phải của (1.7) chính là số các tập hợp con của $\{1, 2, \dots, n\}$ nên ta đếm được số các tập hợp con của $\{1, 2, \dots, n\}$ chính là 2^n . Thật ra ta có thể đếm gián tiếp số các tập hợp con của một tập hợp B có n phần tử như sau:

Gọi A là một tập hợp con bất kì của B , ta sẽ định nghĩa hàm đặc trưng của A bởi:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ khi } x \in A \\ 0 & \text{ khi } x \notin A \end{cases}$$

Rõ ràng $\chi_A \in \{0, 1\}^B$. Ngược lại, cho trước $f \in \{0, 1\}^B$. Đặt $A = A = f^{-1}(1)$. Khi đó $f = \chi_A$. Bằng cách này ta được một song ánh giữa tập hợp $P(B)$ gồm tất cả các tập hợp con của B và $\{0, 1\}^B$. Suy ra

$$|P(B)| = |\{0, 1\}^B| = 2^n$$

Hai tập hợp $P(B)$ và $\{0, 1\}^B$ (kí hiệu là 2^B) là các đại số Boole sẽ được nghiên cứu trong Chương 4.

Bây giờ ta hãy mở rộng khái niệm tổ hợp trong đó cho phép lặp lại. Trước hết ta hãy xét ví dụ: Một học sinh đến cửa hàng mua 4 cây bút chọn trong 3 màu khác nhau là xanh, đỏ và vàng. Có bao nhiêu cách khác nhau để chọn mua hàng?

Trước hết ta liệt kê các trường hợp khác nhau:

Khi mua 4 bút cùng màu: có 3 trường hợp.

Khi mua 3 bút cùng màu và bút thứ tư chọn tùy ý trong 2 màu còn lại: có $3 \times 2 = 6$ trường hợp (Nguyên lí nhân).

Khi mua 2 bút cùng màu và 2 bút kia chọn trong 2 màu còn lại: có 3 trường hợp

Khi mua 2 cặp bút cùng màu: có $\binom{3}{2} = 3$ trường hợp.

Như vậy tổng cộng có $3 + 6 + 3 + 3 = 15$ cách mua hàng khác nhau.

Tuy nhiên nếu liệt kê như vậy rất khó mở rộng cho trường hợp có nhiều bút và nhiều màu để chọn. Do đó, ta biểu diễn mỗi trường hợp bởi 4 dấu “+” và 2 dấu “-” đặt liên tiếp trên một đường thẳng: số dấu + bên trái dấu “-” đầu tiên chỉ số bút xanh, số dấu “+” nằm giữa 2 dấu “-” chỉ số bút đỏ và số dấu “+” nằm bên phải dấu “-” cuối cùng chỉ số bút màu vàng. Như vậy:

Trường hợp mua 4 bút xanh được biểu diễn bởi: + + + + - -

Trường hợp mua 1 bút xanh và 3 bút vàng được biểu diễn bởi: + - - + + +

Tức là mỗi trường hợp tương ứng với việc lựa chọn vị trí của 2 dấu “-” trong số 6 kí hiệu, nói cách khác ứng với một tập hợp con 2 phần tử của tập hợp gồm 6 phần tử $\{1, 2, \dots, 6\}$.

Từ đó suy ra số cách mua hàng khác nhau chính là: $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

Bằng cách này ta có thể tổng quát hóa việc chọn ra r vật trong số n loại vật khác nhau trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần. Như trên mỗi trường hợp lựa chọn có thể được biểu diễn bằng cách chèn $(n-1)$ dấu “-” vào trong số r dấu “+” để chia đoạn thẳng thành n đoạn tương ứng với số vật mỗi loại. Do đó số cách chọn lựa khác nhau mà ta gọi là số tổ hợp lặp chập r của n vật chọn r chính là:

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$$

Ví dụ 1.38. 1) Có r vật đồng nhất nhau, hỏi có bao nhiêu cách chia chúng vào n hộp phân biệt nhau?

Ở đây mỗi cách chia chính là một tổ hợp của n vật chọn ở nên số cách chia khác nhau chính là $\binom{n+r-1}{r}$

2) Xét phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r \quad (1.9)$$

trong đó n và r là các số nguyên không âm cho trước và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn lấy giá trị nguyên không âm. Ta hãy tìm xem phương trình trên có bao nhiêu lời giải. Mỗi lời giải là một bộ n thành phần $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa (1,9). Như vậy ta có thể liên kết một lời giải với một cách chia r vật đồng nhất nhau vào n hộp phân biệt: x_i chính là số vật chứa trong hộp thứ i . Do đó số lời giải là số tổ hợp lặp chập r của n : $\binom{n+r-1}{r}$.

1.6.4. Nguyên lý chuồng bồ câu (Nguyên lý Dirichlet)

Trong Mệnh đề 1.7, ta đã giả sử $|A| = m \leq |B| = n$ để có thể chọn ra được một họ m phần tử phân biệt có thứ tự của B ; nói cách khác để chọn ra một đơn ánh từ A vào B . Trong trường hợp $m > n$ thì không tồn tại đơn ánh từ A vào B theo nguyên lý chuồng bồ câu sau đây.

Nguyên lý chuồng bồ câu: Nếu chuồng bồ câu có ít cửa hơn số bồ câu thì có ít nhất hai chim bồ câu ở chung trong một cửa.

Ví dụ 1.39. 1) Gọi A là số bồ câu và B là số cửa. Một ánh xạ $f: A \rightarrow B$ chính là một cách xếp chim bồ câu vào các cửa. Nói rằng có hai chim bồ câu ở chung một cửa có nghĩa là có hai phần tử phân biệt của A có chung ảnh nên f không đơn ánh.

2) Trong một nhóm có 367 người sẽ có ít nhất hai người có cùng ngày tháng sinh. Ở đây số các ngày tháng sinh khác nhau (366 ngày, kể cả ngày 29 tháng 02) chính là số cửa của chuồng bồ câu.

3) Xét một cơ sở dữ liệu có 500.000 bản tin. Hỏi có thể sử dụng một vùng (thuộc tính) với nhiều nhất 4 ký tự là các mẫu tự làm khóa chính hay không? (Một vùng được gọi là một khóa chính nếu giá trị của nó xác định bản tin một cách duy nhất). Để giải đáp bài toán trên, ta sẽ sử dụng số các từ gồm nhiều nhất 4 mẫu tự làm số cửa của chuồng bồ câu. Số cửa này tính được bằng Nguyên lý cộng và Nguyên lý nhân:

$$26^4 + 26^3 + 26^2 + 26^1 = 475\,254$$

Vì có đến 500.000 bồ câu nên có ít nhất 2 bản tin có cùng giá trị của thuộc tính. Vậy không thể dùng thuộc tính này làm khóa chính được.

4) Ta hãy dùng Nguyên lý chuồng bồ câu để chứng minh rằng mọi tập hợp con A có ít nhất 6 phần tử của $B = \{1, 2, \dots, 9\}$ sẽ có hai trong số các phần tử có tổng bằng 10.

Thật vậy, ở đây các cửa của chuồng bồ câu được chọn là các tập hợp con $\{1, 9\}; \{2, 8\}; \{3, 7\}; \{4, 6\}; \{5\}$. Do chỉ có 5 cửa trong khi số chim bồ câu lớn hơn hoặc bằng 6 nên có ít nhất hai phần tử phân biệt của A thuộc về cùng một tập hợp con trên, hay chính xác hơn thuộc về cùng một trong bốn tập hợp con đầu tiên. Đó là những cặp có tổng bằng 10.

Chú ý. Để áp dụng Nguyên lý chuồng bồ câu chúng ta cần xác định đúng đâu là số bồ câu và đâu là số cửa như ví dụ sau cho thấy.

Giả sử A là một tập hợp con có 6 phần tử của $\{1, 2, \dots, 14\}$. Chứng minh rằng trong số các tập hợp con khác rỗng của A , có ít nhất hai tập hợp con mà tổng của các phần tử là như nhau.

Giả sử B là một tập hợp con khác rỗng bất kì của A . Gọi S_B là tổng của các phần tử của B . Khi đó ta có

$$1 \leq S_B \leq 9 + 10 + \dots + 14 = 69$$

Nếu chọn các số từ 1 đến 69 là số cửa của chuồng bồ câu và số tập hợp con khác rỗng của A là số bồ câu thì số bồ câu là: $2^6 - 1 = 63$. Do số bồ câu ít hơn số cửa, ta không thể áp dụng Nguyên lý chuồng bồ câu được. Tuy nhiên nếu chỉ xét các tập hợp con B có tối đa 5 phần tử thì

$$1 \leq S_B \leq 10 + \dots + 14 = 60$$

trong khi số bồ câu là $63 - 1 = 62$ (trừ 1 tập hợp con 6 phần tử). Do đó theo Nguyên lý chuồng bồ câu sẽ có hai tập hợp con B, B' có tối đa 5 phần tử của A sao cho $S_B = S_{B'}$.

TIÊU KẾT CHƯƠNG 1

A. Hệ thống nội dung trọng tâm

Nội dung chương này bao gồm: Kiến thức về đại số mệnh đề gồm khái niệm, các phép toán mệnh đề; dạng mệnh đề và các tương đương logic. Sáu quy tắc suy diễn cơ bản. Khái niệm cơ bản về hai lượng từ tồn tại và với mọi. Nguyên lý quy nạp gồm hai phương pháp chứng minh là quy nạp yếu và quy nạp mạnh. Kiến thức về đại số tổ hợp gồm các khái niệm liên quan đến nguyên lý đếm: quy tắc cộng, quy tắc nhân, chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp, nguyên lý chuồng bồ câu.

B. Nội dung thảo luận – nhiệm vụ học tập

1. Thế nào là mệnh đề, giá trị chân lý của mệnh đề. Cho ví dụ.
2. Lấy ví dụ hai mệnh đề nguyên thủy biểu diễn. Thực hiện các phép toán mệnh đề.
3. Dạng mệnh đề, công thức mệnh đề, mệnh đề tương đương. Cho ví dụ.
4. Quy tắc suy diễn là gì? Cho ví dụ.
5. Lượng từ là gì, vị từ là gì? Cho ví dụ.
6. Nguyên lý quy nạp toán học. Lấy 2 ví dụ vận dụng phương pháp chứng minh quy nạp yếu và quy nạp mạnh.
7. Phân biệt các khái niệm về quy tắc cộng, quy tắc nhân, chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp. Cho ví dụ.

C. Bài tập chương

1.1. Định nghĩa hàm mệnh đề, miền đúng và các hàm hằng?

1.2. Định nghĩa các lượng từ?

1.3. Diễn đạt bằng kí hiệu các mệnh đề sau:

- a. 3 bé hơn 5 và 5 bé hơn 10.
- b. 3 bé hơn 5 nhưng 5 không bé hơn 10.
- c. 3 không bé hơn 5 mà 5 bé hơn 10.
- d. 3 không bé hơn 5 mà 5 cũng không bé hơn 10.

1.4. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là mệnh đề

- a. Nguyễn Du là nhà văn giỏi.
- b. $x - 2$ là số nguyên dương.
- c. 7 là số nguyên tố.

- d. Hôm nay trời nắng đẹp.
- e. Sinh viên ngành Sư phạm Tin học Công nghệ Tiểu học.

1.5. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng.

- a. Tập hợp số tự nhiên là tập hợp hữu hạn.
- b. Trẻ mầm non ba đến bốn tuổi đã có thể nhận biết và gọi đúng tên hình vuông, hình tròn.
- c. Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.
- d. Hình vuông cũng là hình chữ nhật.
- e. Số 56 chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 3.

1.6. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai:

- a) $p = "4 - x < -2 \Leftrightarrow x^2 < 4"$
- b) $q = "\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16"$
- c) $r = "\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \times 5"$
- d) $k = "-1 < x < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1"$

1.7. Gọi p và q là các mệnh đề: $p = "Minh giỏi Toán"$, $q = "Minh yếu Anh văn"$. Hãy viết các mệnh đề sau dưới dạng kí hiệu trong đó sử dụng các phép toán.

- a. "Minh giỏi Toán nhưng yếu Anh văn"
- b. "Minh yếu cả Toán lẫn Anh văn"
- c. "Minh giỏi Toán hay Minh vừa giỏi Anh văn vừa yếu Toán"
- d. "Nếu Minh giỏi Toán thì Minh giỏi Anh văn"
- e. "Minh giỏi Toán và Anh văn hay Minh yếu Toán nhưng giỏi Anh văn"

1.8. Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a. Ngày mai nếu trời mưa hay trời lạnh thì tôi sẽ không ra ngoài
- b. 15 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4
- c. Hình tứ giác này không phải là hình chữ nhật mà cũng không phải là hình thoi
- d. Nếu An không đi làm ngày mai thì sẽ bị đuổi việc
- e. Mọi tam giác đều có các góc bằng 60° .

1.9. Cho hai mệnh đề p : "4 không là hợp số", q : " $\pi < 4$ ". Mệnh đề nào sau đây sai:

- a. $p \Rightarrow q$
- b. $\bar{p} \Leftrightarrow q$
- c. $\bar{q} \Rightarrow p$
- d. $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$

1.10. Cho các mệnh đề: $p = "45$ chia hết cho 15", $q = "45$ chia hết cho 3 và cho 5".

Hãy phát biểu thành lời các mệnh đề sau và tìm giá trị chân lí của các mệnh đề đó.

a. $p \Rightarrow q$ b. $\bar{p} \Leftrightarrow q$ c. $\bar{q} \Rightarrow p$ d. $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$

1.11. Tìm miền đúng của các hàm mệnh đề xác định trên tập số tự nhiên sau:

a. $p = "x \text{ là số chẵn}"$ b. $q = "x \text{ chia hết cho } 5";$
c. $r = "x \text{ chia } 5 \text{ dư } 4"$ d. $k = "x^2 + 3x - 4 = 0"$

1.12. Tìm miền đúng của các hàm mệnh đề xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ sau đây

a. $p = "2x + 5 > 1 - 4x"$ b. $q = "(x - 2)(2x^2 - 3x + 1) = 0"$
c. $r = "x^2 + 3x - 4 \leq 0"$ d. $k = |2x + 1| > 0"$

1.13. Trong các mệnh đề sau, hãy chọn mệnh đề đúng:

a. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 = 0;$ b. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x;$
c. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0;$ d. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

1.14. Lập bảng giá trị chân lí của công thức:

a. $\overline{p \wedge q \Rightarrow p \wedge r}$ b. $\overline{(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)}$
c. $(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (p \Rightarrow q) \vee (\bar{p} \Rightarrow \bar{q})$ d. $(p \Rightarrow \bar{q}) \vee \overline{p \vee q}$

1.15. Hãy biến đổi công thức sau về dạng đơn giản nhất

a. $(p \vee q \Rightarrow p \vee q) \wedge q$ b. $\overline{p \wedge q} \wedge (p \Rightarrow \bar{q})$

1.16. Chứng minh các đẳng thức sau bằng hai cách (biến đổi đồng nhất, lập bảng giá trị chân lí)

a. $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$ b. $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$
c. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ d. $p \wedge q \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
e. $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ g. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$

1.17. Chứng minh các công thức sau đây là những công thức hằng đúng, sau đó hãy viết chúng dưới dạng luật:

a. $\bar{q} \wedge (p \vee q) \rightarrow q$ b. $p \wedge (p \Leftrightarrow q) \rightarrow q.$

1.18. Cho hai vị từ $p(x)$ xác định như sau: $p(x) = \{x \leq 3\}$; $q(x) = \{x + 1 \text{ là số lẻ}\}$.

Nếu không gian là tập số nguyên, hãy xác định giá trị chân lý của những mệnh đề sau:

- | | |
|------------------------------------|---|
| a. $p(1)$ | b. $q(1)$ |
| c. $p(3)$ | d. $q(6)$ |
| e. $p(7) \wedge q(7)$ | f. $p(3) \vee q(4)$ |
| g. $\overline{p(-4)} \wedge q(-3)$ | h. $\overline{p(-4)} \wedge \overline{q(-3)}$ |

1.19. Cho vị từ $p(x)$ được xác định như sau: $p(x) = \{x^2 - 2x\}$ trên không gian là tập hợp số nguyên. Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a. $p(0)$ | b. $p(1)$ |
| c. $p(2)$ | d. $p(-2)$ |
| e. $\exists x, p(x)$ | f. $\forall x, p(x)$ |

1.20. Cho hai vị từ hai biến $p(x, y)$ và $q(x, y)$ được xác định như sau:

$p(x, y) = \{x^2 \geq y\}$, $q(x, y) = \{x + 2 < y\}$. Nếu không gian là tập số thực, xác định giá trị chân lý của các mệnh đề:

- | | |
|----------------------------------|--|
| a. $p(2, 4)$ | b. $q(1, \pi)$ |
| c. $p(-3, 8) \wedge q(1, 3)$ | d. $p(12, 13) \vee \overline{q(-2, -3)}$ |
| e. $p(2, 2) \rightarrow q(1, 1)$ | f. $p(1, 2) \Leftrightarrow q(1, 2)$ |

1.21. Trên không gian là tập số nguyên, cho các vị từ sau: $p(x) = \{x > 0\}$, $q(x) = \{x \text{ là số chẵn}\}$, $r(x) = \{x \text{ là số chính phương}\}$, $s(x) = \{x \text{ chia hết cho } 4\}$, $t(x) = \{x \text{ chia hết cho } 5\}$.

a. Viết dạng kí hiệu của những mệnh đề sau:

- i) Có ít nhất một số nguyên chẵn.
- ii) Tồn tại một số nguyên dương là số chẵn.
- iii) Nếu x chẵn thì x không chia hết cho 5.
- iv) Không có số nguyên chẵn nào là chia hết cho 5.
- v) Tồn tại một số nguyên chẵn chia hết cho 4.

vi) Nếu x chẵn và x là số chính phương, thì x chia hết cho 4.

b. Xác định giá trị chân lí của mỗi mệnh đề trên. Với mỗi mệnh đề sai, hãy cho một dẫn chứng cụ thể.

c. Viết thành lời các dạng kí hiệu sau:

i) $\forall x, [r(x) \Rightarrow p(x)]$

ii) $\forall x, [s(x) \Rightarrow q(x)]$

iii) $\forall x, [s(x) \Rightarrow q(x)]$

iv) $\forall x, [s(x) \Rightarrow \overline{t(x)}]$

v) $\exists x, [s(x) \wedge \overline{r(x)}]$

vi) $\forall x, [\overline{r(x)} \vee \overline{q(x)} \vee s(x)]$

1.22. Cho 3 vị từ c) $p(x), q(x), r(x)$ như sau:

$$p(x) = \{x^2 - 7x + 10 = 0\}, q(x) = \{x^2 - 2x - 3 = 0\}, r(x) = \{x < 0\}.$$

a. Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề sau, cho dẫn chứng hoặc giải thích cụ thể, nếu không gian là tập số nguyên.

i) $\forall x, [p(x) \Rightarrow \overline{r(x)}]$

ii) $\forall x, [q(x) \Rightarrow r(x)]$

iii) $\exists x, [q(x) \Rightarrow r(x)]$

iv) $\exists x, [p(x) \Rightarrow r(x)]$

b. Câu hỏi như phần a) nhưng không gian là tập số nguyên dương.

c. Câu hỏi như phần a) nhưng không gian chỉ gồm hai số nguyên 2, 5.

1.23. Cho $p(x) = \{x \text{ học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần}\}$. Không gian là tập hợp các sinh viên. Hay diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường.

a. $\exists x, p(x)$

b. $\forall x, p(x)$

c. $\exists x, \overline{p(x)}$

c. $\forall x, \overline{p(x)}$

1.24. Cho vị từ $p(x, y) = \{x \text{ đã học môn } y\}$ với không gian của x là tập hợp tất cả các sinh viên lớp bạn và không gian của y là tập hợp tất cả các môn tin học của học kì mà bạn đang học. Hay diễn đạt các lượng từ sau thành các câu thông thường:

a. $\exists x, \exists y, p(x, y)$

b. $\exists x, \forall y, p(x, y)$

c. $\forall x, \forall y, p(x, y)$

d. $\exists y, \exists x, p(x, y)$

e. $\exists y, \forall x, p(x, y)$

f. $\forall y, \forall x, p(x, y)$

1.25. Cho vị từ: $p(x) = \{x \text{ nói được tiếng Anh}\}$; $q(x) = \{x \text{ biết ngôn ngữ C++}\}$. Cho không gian là tập hợp các sinh viên lớp Sư phạm Tin học và Công nghệ Tiểu học. Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $p(x)$, $q(x)$, các lượng từ và các phép toán logic.

- Có một sinh viên ở lớp Sư phạm Tin học và Công nghệ Tiểu học nói được tiếng Anh và biết C++.
- Có một sinh viên ở lớp Sư phạm Tin học và Công nghệ Tiểu học nói được tiếng Anh nhưng không biết C++.
- Mọi sinh viên ở lớp Sư phạm Tin học và Công nghệ Tiểu học đều nói được tiếng Anh hoặc biết C++.
- Không có một sinh viên nào ở lớp Sư phạm Tin học và Công nghệ Tiểu học nói được tiếng Anh hoặc biết C++.

1.26. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên khác không thì

$$S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$$

1.27. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ ta có: $3^n > n^2 + 4n + 5$

1.28. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

1.29. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên

- Gồm 4 chữ số
- Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau
- Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và là chữ số tự nhiên chẵn
- Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và không bắt đầu bằng chữ số 1
- Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau và hai chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau.

1.30. Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần).

1.31. Một liên đoàn bóng rổ có 10 đội, mỗi đội đấu với mỗi đội khác hai lần, một lần ở sân nhà và một lần ở sân khách. Tìm số trận đấu được sắp xếp.

1.32. Giả sử ta dùng 5 màu để tô cho 3 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Tìm số các cách để chọn những màu cần dùng.

1.33. Tên 15 học sinh được ghi vào 15 tờ giấy để vào trong hộp. Chọn tên 4 học sinh để cho đi du lịch. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các học sinh.

1.34. Trong lớp học có 30 HS. Khi viết chính tả một em phạm 14 lỗi, các em khác phạm số lỗi ít hơn. Chứng minh rằng có ít nhất 3 HS mắc số lỗi bằng nhau (kể cả những người mắc 0 lỗi).

1.35. Chứng tỏ rằng trong sáu số tự nhiên bất kì luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 5.

1.36. Trong một kì thi Toán học có 6 thí sinh được vào chung khảo. Thể lệ của cuộc thi như sau: Mỗi thí sinh phải giải 5 bài toán. Mỗi bài toán đúng được tính 4 điểm. Mỗi bài toán sai hoặc không làm được đều bị trừ 2 điểm. Hãy chứng tỏ rằng trong 6 thí sinh đó có ít nhất hai thí sinh bằng điểm nhau. Biết rằng điểm thấp nhất là điểm 0.

CHƯƠNG 2. QUAN HỆ

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu về quan hệ - một trong những cấu trúc rời rạc quan trọng. Trước hết chúng ta nghiên cứu về quan hệ hai ngôi, các cách biểu diễn quan hệ hai ngôi và các tính chất của quan hệ hai ngôi. Tiếp đến sẽ tìm hiểu về hai lớp quan hệ hai ngôi quan trọng, đó là quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự. Cuối cùng là phần nghiên cứu ngắn gọn về quan hệ n – ngôi, gắn liền với mô hình quan hệ của dữ liệu được ứng dụng nhiều trong Tin học.

2.1. Quan hệ hai ngôi

2.1.1. Tích Descartes của các tập hợp

Định nghĩa 2.1. Cho hai tập A và B . Tích Descartes của hai tập hợp A và B , kí hiệu là $A \times B$, là một tập hợp gồm các cặp sắp thứ tự (a, b) trong đó $a \in A$ và $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Chú ý 2.1. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ và $b = d$.

Ví dụ 2.1. Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{8, 9, 10, 11\}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= \{(1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11), (3, 8), (3, 9), (3, 10), (3, 11)\} \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.2. Cho n tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$. Tích Descartes của n tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$, kí hiệu $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ là tập hợp gồm tất cả các bộ sắp thứ tự n thành phần $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ với $a_i \in A_i, i = \overline{1, n}$.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}$$

Tích Descartes $A \times A \times \dots \times A$ (n lần) của tập hợp A ($n \geq 2$) được viết gọn là A^n :

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A, i = \overline{1, n}\}$$

2.1.2. Quan hệ hai ngôi

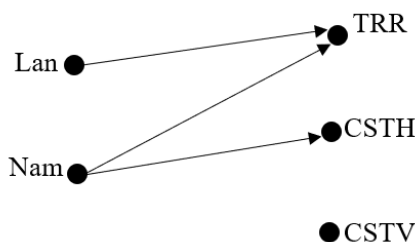
Định nghĩa 2.3. Cho hai tập X và Y . Tập hợp con S của tích Descartes $X \times Y$ gọi là một quan hệ hai ngôi giữa X và Y .

Nếu $X = Y$ thì ta gọi S là quan hệ hai ngôi xác định trên tập X .

Nếu $(x, y) \in S$ thì ta kí hiệu $x S y$ và đọc là “ x có quan hệ S với y ”.

Ví dụ 2.2. Giả sử $X = \{\text{Lan, Nam}\}$ là tập hợp gồm 2 sinh viên của Khoa Giáo dục Tiểu học, $Y = \{\text{TRR, CSTH, CSTV}\}$ là tập hợp gồm các học phần Toán rời rạc, Cơ sở toán học, Cơ sở tiếng Việt.

Tập $S = \{(x, y) \in X \times Y \mid \text{sinh viên } x \text{ đăng ký học học phần } y\} \subset X \times Y$ là một quan hệ hai ngôi giữa X và Y . Nếu Lan và Nam đều đăng ký học học phần Toán rời rạc TRR thì các cặp (Lan, TRR) và (Nam, TRR) thuộc S . Nếu Nam đăng ký học phần Cơ sở toán học CSTD thì cặp (Nam, CSTD) cũng thuộc S . Nếu Lan không đăng ký học phần CSTD thì cặp (Lan, CSTD) không thuộc S , tức Lan không có quan hệ S với CSTD.



Hình 2.1. Biểu diễn quan hệ S dưới dạng đồ thị

Các quan hệ cũng có thể biểu diễn dưới dạng đồ thị (đồ thị có hướng) như trong Hình 2.1, ở đây các đỉnh của đồ thị biểu thị các phần tử của X và Y , còn các cung (cạnh) là các đường có hướng (dấu mũi tên) để biểu diễn các cặp sắp thứ tự. Chúng ta cũng có thể biểu diễn quan hệ này dưới dạng bảng (Bảng 2.1).

S	TRR	CSTD	CSTDV
Lan	x		
Nam	x	x	

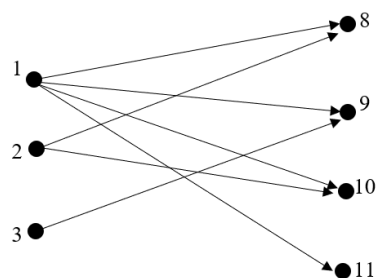
Bảng 2.1. Biểu diễn quan hệ S dưới dạng bảng

Ngoài ra, nếu ở ô có kí hiệu x ta thay bởi số 1, ô không có kí hiệu x ta thay bởi số 0 thì ta có ma trận biểu diễn mối quan hệ S như sau:

$$\begin{array}{c}
 \text{TRR} \quad \text{CSTD} \quad \text{CSTDV} \\
 \begin{array}{c} \text{Lan} \\ \text{Nam} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Hay có thể viết là $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ nếu không sợ nhầm lẫn.

Ví dụ 2.3. Cho $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{8, 9, 10, 11\}$. Gọi $\mathfrak{R}$ là tập hợp gồm các cặp sắp thứ tự (x, y) với $x \in X, y \in Y$ sao cho x là ước của y . Khi đó, $\mathfrak{R} = \{(1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (2, 8), (2, 10), (3, 9)\}$ là một quan hệ hai ngôi giữa X và Y .



Hình 2.2. Biểu diễn quan hệ $\mathfrak{R}$ dưới dạng đồ thị

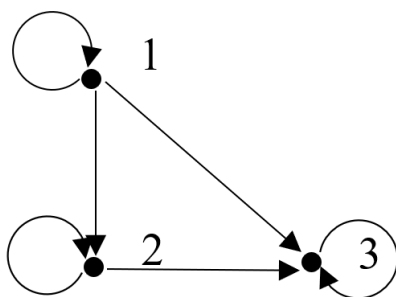
Ngoài ra, có thể biểu diễn quan hệ $\mathfrak{R}$ dưới dạng bảng (Bảng 2.2).

Bảng 2.2. Biểu diễn quan hệ $\mathfrak{R}$ dưới dạng bảng

$\mathfrak{R}$	8	9	10	11
1	x	x	x	x
2	x		x	
3		x		

Hay ma trận biểu diễn quan hệ $\mathfrak{R}$ là:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2.4. Cho $X = \{1, 2, 3\}$. Gọi $\mathfrak{R}$ là tập hợp gồm các cặp sắp thứ tự (x, y) với $x, y \in X$ sao cho x nhỏ hơn hoặc bằng y . Khi đó, $\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ là một quan hệ hai ngôi giữa trên X . Biểu diễn quan hệ $\mathfrak{R}$ dưới dạng đồ thị như sau:



Hình 2.3. Biểu diễn quan hệ $\mathfrak{R}$ dưới dạng đồ thị

Ví dụ 2.5. Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$, ta gọi tập $G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ là đồ thị của ánh xạ f . Khi đó G cũng là một quan hệ hai ngôi giữa X và Y .

Ví dụ 2.6. Cho trước số nguyên $n \geq 2$, ta định nghĩa quan hệ đồng dư modulo (môđun) n trên $\mathbb{Z}$ như sau:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a - b) : n$$

Như vậy, $a \equiv b \pmod{n}$ nghĩa là a và b có cùng số dư khi chia cho n . Với $n = 5$, ta có $7 \equiv 2 \pmod{5}$, $9 \equiv 4 \pmod{5}$.

2.1.3. Một số tính chất của quan hệ hai ngôi

Định nghĩa 2.4. Quan hệ hai ngôi S trên tập X gọi là có tính chất:

1. **phản xạ** nếu với mọi $x \in X$, ta có xSx
2. **đối xứng** nếu với mọi $x, y \in X$, xSy kéo theo ySx .
3. **phản đối xứng** nếu với mọi $x, y \in X$, xSy và ySx kéo theo $x = y$.
4. **bắc cầu** nếu với mọi $x, y, z \in X$, xSy và ySz kéo theo xSz .

Ví dụ 2.7.

- a. Trên tập $X = \{2, 3, 4, 5\}$ xác định các quan hệ sau:

$$S_1 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$S_2 = \{(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 3), (5, 4)\}$$

$$S_3 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

Biểu diễn các quan hệ đó dưới dạng bảng như sau:

S_1	2	3	4	5
2	x	x		
3		x		x
4	x		x	
5		x		x

S_1 có tính chất phản xạ, không có tính chất đối xứng vì $(4, 2) \in S_1$ nhưng $(2, 4) \notin S_1$, không có tính chất bắc cầu vì $(2, 3), (3, 5) \in S_1$ nhưng $(2, 5) \notin S_1$.

S_2	2	3	4	5
2		x	x	
3	x			x
4	x			x
5		x	x	

S_2 có tính chất đối xứng, không có tính chất phản xạ vì $(2, 2) \notin S_2$, không có tính chất bắc cầu vì $(2, 3), (3, 2) \in S_2$ nhưng $(2, 2) \notin S_2$.

S_3	2	3	4	5
2	x	x	x	
3	x	x	x	
4		x	x	
5				

S_3 không có tính chất phản xạ vì $(5,5) \notin S_3$, không có tính chất đối xứng vì $(2,4) \in S_3$ nhưng $(4,2) \notin S_3$, không có tính chất bắc cầu vì $(4,3), (3,2) \in S_3$ nhưng $(4,2) \notin S_3$.

b. Quan hệ “bằng nhau” trên tập số thực $\mathbb{R}$ có tất cả các tính chất nói trên.

Thật vậy:

- Tính chất phản xạ: $\forall x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $x = x$
- Tính chất đối xứng: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, từ $x = y$ kéo theo $y = x$
- Tính chất phản đối xứng: hiển nhiên
- Tính chất bắc cầu: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, từ $x = y$ và $y = z$ kéo theo $x = z$

c. Quan hệ “có cùng chữ số hàng đơn vị” trên tập hợp $\mathbb{N}$ có các tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu và không có tính chất phản đối xứng.

Thật vậy:

- Có tính chất phản xạ:

$\forall x \in \mathbb{N}$, ta luôn có x có cùng chữ số hàng đơn vị với x .

- Có tính chất đối xứng:

$\forall x, y \in \mathbb{N}$, x có cùng chữ số hàng đơn vị với $y \Rightarrow y$ có cùng chữ số hàng đơn vị với x .

- Không có tính chất phản đối xứng: Vì với $x, y \in \mathbb{N}$, $x = 13$, $y = 23$ là hai số có cùng chữ số hàng đơn vị nhưng $13 \neq 23$.

- Có tính chất bắc cầu:

$\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, xSy và ySz , ta có

$$xSy \Rightarrow x \text{ có cùng chữ số hàng đơn vị với } y \quad (1)$$

$$\text{và } ySz \Rightarrow y \text{ có cùng chữ số hàng đơn vị với } z \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x$ có cùng chữ số hàng đơn vị với $z \Rightarrow xSz$

d. Quan hệ hai ngôi “ $\leq$ ” thông thường trên các tập hợp $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ đều có các tính chất phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

e. Trên tập $\mathbb{N}^*$ định nghĩa quan hệ chia hết “ $|$ ”:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a | b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}, b = aq$$

Quan hệ chia hết trên $\mathbb{N}^*$ có tính chất phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu. Tuy nhiên không có tính chất đối xứng vì $1|2$ nhưng $2 \nmid 1$.

f. Quan hệ bao hàm “ $\subset$ ” trên tập hợp $\wp(X)$ gồm các tập hợp con của tập hợp X tùy ý, có ba tính chất: phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

g. Trong tập D gồm các đường thẳng trong một mặt phẳng cho trước, quan hệ “cùng phương” xác định bởi:

$$\forall d_1, d_2 \in D, d_1 S d_2 \Leftrightarrow d_1 \text{ cùng phương với } d_2$$

Quan hệ cùng phương trên tập D gồm các đường thẳng trong một mặt phẳng cho trước có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

- h. Trong tập D gồm các đường thẳng trong một mặt phẳng cho trước, quan hệ “vuông góc” xác định bởi:

$$\forall d_1, d_2 \in D, d_1 S d_2 \Leftrightarrow d_1 \perp d_2$$

Quan hệ vuông góc trên tập D gồm các đường thẳng trong một mặt phẳng cho trước chỉ có tính chất đối xứng, không có các tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

2.2. Quan hệ tương đương

2.2.1. Quan hệ tương đương

Định nghĩa 2.5. Quan hệ hai ngôi S xác định trên tập hợp X gọi là quan hệ tương đương nếu có các tính chất sau đây:

1. Phản xạ: $\forall x \in X, x S x$
2. Đối xứng: $\forall x, y \in X, x S y \Rightarrow y S x$
3. Bắc cầu: $\forall x, y, z \in X, x S y \text{ và } y S z \Rightarrow x S z$.

Quan hệ tương đương thường kí hiệu là “ $\sim$ ”

Ví dụ 2.8.

- a. Quan hệ “bằng nhau” trên tập số thực $\mathbb{R}$ ở *Ví dụ 2.7(b)* là quan hệ tương đương;
- b. Quan hệ “có cùng chữ số hàng đơn vị” trên tập hợp $\mathbb{N}$ ở *Ví dụ 2.7(c)* là quan hệ tương đương;
- c. Quan hệ cùng phương trên tập D gồm các đường thẳng trong một mặt phẳng cho trước ở *Ví dụ 2.7(g)* là quan hệ tương đương.
- d. Trở lại *Ví dụ 2.6*, với số nguyên $n \geq 2$, quan hệ đồng dư modulo (môđun) n trên $\mathbb{Z}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a - b) : n$$

là một quan hệ tương đương trên tập $\mathbb{Z}$.

Thật vậy:

- $\equiv \pmod{n}$ có tính chất phản xạ:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a - a = 0 \Rightarrow a - a : p \quad (p \neq 0, p \in \mathbb{N}) \Rightarrow a \equiv a \pmod{n}$$

- $\equiv \pmod{n}$ có tính chất đối xứng:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a - b : p \Rightarrow -(a - b) : p \Rightarrow b - a : p \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$$

- $\equiv \pmod{n}$ có tính chất bắc cầu:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{n} \text{ và } b \equiv c \pmod{n}, \text{ ta có:}$$

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow (a - b) : p \quad (1)$$

$$b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow (b - c) : p \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $(a - b + b - c) : p \Rightarrow (a - c) : p \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$.

2.2.2. Lớp tương đương và tập thương

Định nghĩa 2.6. Cho quan hệ tương đương $\sim$ trên X và phần tử $a \in X$. Tập hợp

$$\bar{a} = \{x \in X \mid x \sim a\} = [a]$$

gọi là lớp tương đương của phần tử a theo quan hệ $\sim$.

Định lý 2.1. Cho quan hệ tương đương “ $\sim$ ” trên tập hợp X . Quan hệ tương đương “ $\sim$ ” chia tập X thành các tập con không rỗng, đôi một rời nhau sao cho mỗi phần tử của X đều thuộc và chỉ thuộc một trong các tập con ấy và các phần tử trong cùng một tập con thì tương đương với nhau.

Nghĩa là:

1. $\forall a \in X, [a] \neq \emptyset$;
2. $\forall a, b \in X, [a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$;
3. $\forall a, b \in X, [a] = [b]$ hoặc $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Chứng minh:

1. $\forall a \in X, a \sim a$. Do đó $a \in [a]$, suy ra $[a] \neq \emptyset$.
2. $(\Rightarrow)$ Giả sử $[a] = [b]$, do $a \in [a] = [b]$ suy ra $a \sim b$ (1).

$(\Leftarrow)$ Ngược lại, giả sử $a \sim b$. Khi đó, $\forall x \in [a], x \sim a$. Do tính bắc cầu nên suy ra $x \sim b$, vậy $x \in [b]$. Suy ra $[a] \subset [b]$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $[b] \subset [a]$.

Do đó, $[a] = [b]$ (2).

Vậy $a \sim b$ suy ra $[a] = [b]$.

3. Giả sử $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Khi đó, $\exists c \in [a] \cap [b]$, do đó $c \sim a$ và $c \sim b$. Mà $\sim$ có tính chất đối xứng nên suy ra $a \sim c$ và $c \sim b$. Áp dụng tính chất bắc cầu của $\sim$, ta có $a \sim b$. Vậy $[a] = [b]$ (theo Định lý 2.1.(2)).

Định nghĩa 2.7. Tập hợp các lớp tương đương xác định bởi quan hệ tương đương $\sim$ gọi là tập thương của tập hợp X và kí hiệu là $X / \sim$.

$$X / \sim = \{\bar{a} \mid a \in X\}$$

Ví dụ 2.9.

a. Quan hệ “cùng chữ số hàng đơn vị” trên $\mathbb{N}$ là quan hệ tương đương ở Ví dụ 2.8(b). Quan hệ này có các lớp tương đương sau:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ có chữ số hàng đơn vị là } 0\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ có chữ số hàng đơn vị là } 1\}$$

.....

$$\bar{9} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ có chữ số hàng đơn vị là } 9\}$$

và tập thương $\mathbb{N}/$ “cùng chữ số hàng đơn vị” = $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{9}\}$.

b. Với số nguyên $n \geq 2$, quan hệ “đồng dư theo modulo n ” là một quan hệ tương đương theo *Ví dụ 2.8(d)*. Quan hệ này có các lớp tương đương:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod{n}\} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod{n}\} = \{nk + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

.....

$$\overline{n-1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv n-1 \pmod{n}\} = \{nk + n-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Tập thương của tập số nguyên $\mathbb{Z}$ đối với quan hệ “đồng dư theo modun n ” là $\mathbb{Z}/ \equiv \pmod{n} = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$.

Qua các ví dụ trên ta có nhận xét rằng: Xuất phát từ một tập hợp đã cho và một quan hệ tương đương trên tập ấy ta xây dựng được một tập hợp mới mà các phần tử là các lớp tương đương.

2.3. Quan hệ thứ tự

2.3.1. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 2.8. Quan hệ hai ngôi S trên tập hợp X gọi là quan hệ thứ tự nếu có các tính chất

1. Phản xạ: $\forall x \in X, x S x$
2. Phản đối xứng: $\forall x, y \in X, x S y \text{ và } y S x \Rightarrow x = y$
3. bắc cầu: $\forall x, y, z \in X, x S y \text{ và } y S z \Rightarrow x S z$.

Ví dụ 2.10.

a. Quan hệ hai ngôi “ $\leq$ ” thông thường trên các tập hợp $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ở *Ví dụ 2.7(c)* là một quan hệ thứ tự.

b. Quan hệ chia hết “ $\mid$ ” ở *Ví dụ 2.7(d)* là quan hệ thứ tự trên tập $\mathbb{N}^*$.

c. Quan hệ bao hàm “ $\subset$ ” trên tập hợp $\wp(X)$ gồm các tập hợp con của tập hợp X tùy ý ở *Ví dụ 2.7(e)* là quan hệ thứ tự.

Chú ý 2.2.

- Quan hệ chia hết là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$ nhưng không phải là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$ (vì 0 không thể là ước của 0 nên quan hệ chia hết trên $\mathbb{N}$ không có tính chất phản xạ) và cũng không phải là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}$.

- Quan hệ $\leq$ (nhỏ hơn hay bằng) thông thường trong các tập hợp số là quan hệ thứ tự.

Đây là một quan hệ thứ tự điển hình đến nỗi người ta mượn kí hiệu “ $\leq$ ” để chỉ thứ tự ngay cả trong trường hợp tổng quát. Trong trường hợp tổng quát $x \leq y$ không nhất thiết mang ý nghĩa thông thường. Vì vậy, quan hệ thứ tự thường kí hiệu là “ $\leq$ ” (đọc là “nhỏ hơn hoặc bằng”).

Để tránh nhầm lẫn, khi nào quan hệ “ $\leq$ ” mang ý nghĩa thông thường thì ta sẽ nói rõ.

$\forall x, y \in X$, kí hiệu:

$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$ và đọc là “y lớn hơn hoặc bằng x”

$x < y \Leftrightarrow x \leq y$ và $x \neq y$ và đọc là “x nhỏ hơn y”, “x đứng trước y” hay “x thực sự nhỏ hơn y”

Nếu có $x < y$ ta còn có $y > x$ và đọc là “y lớn hơn x”

Chú ý rằng quan hệ “ $<$ ” không phải là quan hệ thứ tự.

2.3.2. Quan hệ thứ tự toàn phần – Tập sắp thứ tự

Tập hợp X trên đó có xác định một quan hệ thứ tự gọi là tập sắp thứ tự (theo quan hệ thứ tự đó).

Trong một tập sắp thứ tự có thể xảy ra hai trường hợp:

1. Mọi cặp phần tử x, y của X đều nằm trong quan hệ thứ tự đó. Nói khác đi,

$\forall x, y \in X$ ta nhất thiết có hoặc $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

2. Không phải mọi cặp của X đều có thể so sánh được nghĩa là có cặp x, y sao cho ta không có cả $x \leq y$ lẫn $y \leq x$.

Định nghĩa 2.9. Quan hệ thứ tự “ $\leq$ ” trên tập hợp X gọi là quan hệ thứ tự toàn phần nếu mọi phần tử của tập hợp X đều so sánh được với nhau. Tức là $\forall x, y \in X$, $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Khi đó tập X gọi là tập sắp thứ tự toàn phần.

Trường hợp trái lại, tập X gọi là tập sắp thứ tự bộ phận.

Ví dụ 2.11.

- a. Quan hệ “ $\leq$ ” trên tập $\mathbb{N}$ là quan hệ thứ tự toàn phần vì $\forall a, b \in \mathbb{N}$ thì hoặc $a \leq b$ hoặc $b \leq a$.

- b. Quan hệ chia hết “ $|$ ” trên tập $\mathbb{N}^*$ là quan hệ thứ tự bộ phận vì hai phần tử bất kỳ không thể so sánh được.

Chẳng hạn: 5 không phải là ước của 7 và 7 cũng không phải là ước của 5.

- c. Quan hệ bao hàm “ $\subset$ ” trên tập $P(X)$ là quan hệ thứ tự bộ phận vì hai tập con A, B bất kỳ của X thì $A \subset B$ và $B \subset A$.

Tuy nhiên với $X = \emptyset$ hoặc X là đơn tử thì $P(X)$ với quan hệ “ $\subset$ ” là quan hệ thứ tự toàn phần (dành cho bạn đọc).

2.3.3. Các phần tử đặc biệt

Định nghĩa 2.10. Cho $(X, \leq)$ là tập sắp thứ tự.

1. Phần tử $a \in X$ gọi là phần tử lớn nhất (phần tử nhỏ nhất) của tập hợp X nếu:

$$\forall x \in X, x \leq a \text{ (} a \leq x \text{)}$$

2. Tập X gọi là tập sắp tốt nếu mọi tập con không rỗng của nó đều có phần tử nhỏ nhất.

Chú ý 2.3. Tập X không có quá một phần tử lớn nhất (nhỏ nhất)

Ví dụ 2.12.

a. Trong tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{N}$ với quan hệ “ $\leq$ ”, phần tử 0 là phần tử nhỏ nhất, không có phần tử lớn nhất.

Tuy nhiên trong tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{Z}$ với quan hệ “ $\leq$ ”, không có phần tử nhỏ nhất và không có phần tử lớn nhất

b. Xét tập sắp thứ tự $\mathbb{N}^*$ với quan hệ “chia hết” phần tử 1 là phần tử nhỏ nhất, không có phần tử lớn nhất.

c. Cho $A = \{2, 3, 5, 6\}$ và $B = \{2, 4, 6\}$ là các tập con của tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết.

Tập A không có phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất.

Tập B không có phần tử lớn nhất, có phần tử nhỏ nhất là 2.

d. Trong tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{N}$ với quan hệ “ $\leq$ ” là một tập sắp thứ tự tốt.

Tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ với quan hệ “ $\leq$ ” không phải là tập sắp thứ tự tốt vì không có phần tử nhỏ nhất.

e. Tập sắp thứ tự $\mathbb{N}^*$ với quan hệ chia hết “ $\backslash$ ” không phải là tập sắp thứ tự tốt vì không có phần tử nhỏ nhất.

Chẳng hạn, tập con $\{2, 3, 5, 7\}$ không có phần tử nhỏ nhất.

f. Với tập hợp X tùy ý, tập hợp các tập con $P(X)$ của X với quan hệ thứ tự “ $\subset$ ” X là phần tử lớn nhất, $\emptyset$ là phần tử nhỏ nhất.

Định nghĩa 2.11. Cho $(X, \leq)$ là tập sắp thứ tự và A là tập con khác rỗng của X

1. Phần tử $x \in X$ gọi là cận trên (cận dưới) của tập A nếu $\forall a \in A, a \leq x$ ($x \leq a$)

2. Cận trên bé nhất của tập A , kí hiệu $\text{Sup}A$ gọi là cận trên đúng. Cận dưới lớn nhất, kí hiệu $\text{Inf}A$ gọi là cận dưới đúng.

Chú ý 2.4.

➤ Mọi bộ phận A của tập sắp thứ tự X có thể không có chặn trên (chặn dưới) nhưng cũng có thể có nhiều chặn trên (chặn dưới)

- Phần tử $x \in X$ là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của A khi và chỉ khi x là chặn trên (chặn dưới) của A .
- Mỗi bộ phận A của X nếu có chặn trên (chặn dưới) đúng thì nó là duy nhất.

Ví dụ 2.13.

a. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ mọi $x \geq 2$ đều là cận trên, mọi $x \leq 1$ đều là cận dưới của A .

Tập A có cận trên đúng $\sup A = 2 \notin A$ và cận dưới đúng $\inf A = 1 \in A$.

b. Cho $A = \{2, 3, 5, 6\}$ và $B = \{2, 4, 6\}$ là các tập con của tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết.

Tập A không có cận dưới, cận trên đúng $\sup A = 30$ và các số có dạng $n = 30k, k \in \mathbb{N}^*$ đều là các cận trên của A .

Tập B có phần tử nhỏ nhất là 2, không có phần tử lớn nhất.

c. Với tập hợp X tùy ý, tập hợp các tập con $\wp(X)$ của X với quan hệ thứ tự “ $\subset$ ”. Với mọi $A, B \in \wp(X)$, gọi $M = \{A, B\}$. Khi đó:

$$\sup(M) = A \cup B \text{ và } \inf(M) = A \cap B.$$

Định nghĩa 2.12. Cho $(X, \leq)$ là tập sắp thứ tự và A là tập con khác rỗng của tập X

Phần tử $a \in A$ gọi là phần tử tối đại (phần tử tối tiểu) của tập hợp A nếu

$$\forall x \in A, a \leq x \text{ kéo theo } a = x \text{ (} x \leq a \text{ kéo theo } x = a \text{)}$$

Chú ý 2.5.

- Nếu phần tử a là phần tử tối đại (tối tiểu) của X mà $a \in A$ thì a cũng là phần tử tối đại (tối tiểu) của A . Nhưng điều ngược lại không đúng.
- Tập A có thể có nhiều hoặc không có phần tử tối đại (tối tiểu).

Định lý 2.2. Nếu A là tập con khác rỗng của tập sắp thứ tự X có phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) a thì a là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất của A .

Chứng minh:

Giả sử a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của A . Khi đó, $\forall x \in A, x \leq a$ ($a \leq x$).

Với $\forall x \in A$, giả sử $a \leq x$ ($x \leq a$) vì có $x \leq a$ ($a \leq x$) nên $x = a$.

Vậy a là phần tử tối đại (tối tiểu) của A .

Giả sử A có 2 phần tử tối đại (tối tiểu) là a và a' . Khi đó do a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) nên $a' \leq a$ ($a \leq a'$). Mặt khác do a' là phần tử tối đại của A nên từ $a' \leq a$ ($a \leq a'$) kéo theo $a = a'$.

Vậy a là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất.

Định lý 2.3. A là tập con khác rỗng của tập sắp thứ tự toàn phần X có phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) a khi và chỉ khi a là phần tử tối đại (tối tiểu) của A .

Chứng minh:

Theo định lý 2.2 nếu a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) thì a là phần tử tối đại (tối tiểu)

Ta chứng minh mệnh đề đảo:

Giả sử, $a \in A$ là phần tử tối đại (tối tiểu) của A . Vì X là tập sắp thứ tự toàn phần nên A cũng là tập sắp thứ tự toàn phần.

$\forall x \in A$, giả sử $a < x$ ($x < a$). Khi đó, với $a \leq x$ ($x \leq a$) ta suy ra $x = a$. Mâu thuẫn với $a < x$ ($x < a$).

Vậy $x \leq a$ ($a \leq x$). Nghĩa là a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất).

Ví dụ 2.14.

a. Trong tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{N}$ với quan hệ $\leq$, phần tử 0 là phần tử tối tiểu duy nhất, không có phần tử tối đại.

b. Xét tập sắp thứ tự $\mathbb{N}^*$ với quan hệ “chia hết” phần tử 1 phần tử tối tiểu duy nhất, không có phần tử tối đại.

Cho $A = \{2, 3, 5, 6\}$ và $B = \{2, 4, 6\}$ là các tập con của tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết.

Tập A có các phần tử tối đại là 5 và 6, các phần tử tối tiểu là 2, 3 và 5.

Tập B có phần tử tối tiểu là 2, các phần tử tối đại là 4 và 6.

c. Với tập hợp X tùy ý, tập hợp các tập con $\wp(X)$ của X với quan hệ thứ tự “ $\subset$ ” X là phần tử tối đại, $\emptyset$ là phần tử tối tiểu.

2.4. Quan hệ n -ngôi và ứng dụng

Định nghĩa 2.13. Cho n tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$. Tập hợp con S của tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ là một quan hệ n - ngôi trên các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$. Các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ được gọi là các miền của quan hệ đó.

Nếu $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ thì ta gọi S là quan hệ n - ngôi xác định trên A .

Ví dụ 2.15. Cho $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}, a < b < c\}$. Khi đó S là quan hệ 3 - ngôi xác định trên $\mathbb{Z}$. Ta có $(2, 4, 5) \in S, (4, 2, 5) \notin S$.

Các quan hệ n - ngôi được dùng để biểu diễn các cơ sở dữ liệu của máy tính. Thời gian đòi hỏi để thao tác thông tin trong một cơ sở dữ liệu phụ thuộc vào cách thông tin được lưu trữ như thế nào. Các phép thêm và xóa các bản ghi, cập nhật các bản ghi, tìm kiếm các bản ghi và tổ hợp các bản ghi từ các cơ sở dữ liệu chồng phủ lên nhau được thực hiện hàng triệu lần mỗi ngày trong một cơ sở dữ liệu lớn. Vì tầm quan trọng của các thao tác này, người ta đã phát triển các phương pháp khác nhau để biểu

diễn các cơ sở dữ liệu. Trong mục này chúng ta sẽ xét phương pháp dựa trên khái niệm quan hệ, đó là **mô hình quan hệ của dữ liệu**.

Một cơ sở dữ liệu gồm các **bản ghi**, đó là các bộ n thành phần được tạo bởi các trường. Các **trường** là các mục nhập của các bộ n thành phần. Ví dụ, một cơ sở dữ liệu gồm các bản ghi về sinh viên có thể được tạo bởi các trường chứa mã sinh viên, họ tên, ngày sinh, ngành học, năm vào học, điểm trung bình tích lũy, số tín chỉ tích lũy, số chứng minh nhân dân, email của sinh viên đó. Mô hình quan hệ của dữ liệu biểu diễn một cơ sở dữ liệu gồm các bản ghi như một quan hệ n – ngôi. Như vậy các bản ghi về sinh viên được biểu diễn bởi các bộ 9 thành phần (Mã sinh viên, họ tên, ngày sinh, ngành học, năm vào học, điểm trung bình chung tích lũy, số tín chỉ tích lũy, số chứng minh nhân dân, email của sinh viên).

Sau đây là một cơ sở dữ liệu minh họa gồm 5 bản ghi như trên.

Bảng 2.3. Cơ sở dữ liệu về sinh viên

Mã sinh viên	Họ tên sinh viên	Ngày sinh	Ngành học	Năm vào học	Điểm trung bình chung tích lũy	Số tín chỉ tích lũy	Số CMND	Email
3220120004	Trần Nguyễn Văn Anh	17-10-2002	Giáo dục Tiểu học	2020	3,22	36	201871877	3220120004@ued.udn.vn
3220120023	Nguyễn Ngọc Sỹ	19-05-2002	SPTH&CN tiểu học (*)	2020	2,75	36	201801303	3220120023@ued.udn.vn
3220120029	Lê Thị Ngọc Hà	03-10-2002	Giáo dục Tiểu học	2020	3,25	40	201882444	3220120029@ued.udn.vn
3210120033	Trần Thị Như Hoà	23-04-2002	Toán học	2020	2,89	38	201875420	3210120033@ued.udn.vn
3230120034	Nguyễn Thị Hoa	22-03-2002	Tin học	2020	2,75	36	206277317	3230120034@ued.udn.vn

(*) SPTH&CN tiểu học: Sự phạm Tin học và Công nghệ tiểu học.

Chúng ta thường biểu diễn các quan hệ dưới dạng bảng nên các quan hệ được sử dụng để biểu diễn các cơ sở dữ liệu còn được gọi là các **bảng**, như Bảng 2.3 ở trên.

Một miền của một quan hệ n – ngôi được gọi là **khóa cơ bản** (primary key) khi giá trị của bộ n thành phần tại miền đó xác định bộ n thành phần ấy. Nghĩa là, một miền là một khóa cơ bản khi không có hai bộ n thành phần trong quan hệ đó có cùng một giá trị tại miền đó.

Các bản ghi thường được thêm hay bị xóa đi khỏi các cơ sở dữ liệu. Vì thế, việc một miền là khóa cơ bản sẽ phụ thuộc vào thời gian. Do đó, khóa cơ bản cần được chọn sao cho nó vẫn giữ được tính chất đó bất kỳ khi nào cơ sở dữ liệu bị thay đổi. Điều này có thể thực hiện được bằng cách dùng khóa cơ bản của **nội hàm** cơ sở dữ liệu

– nội hàm chứa tất cả các bộ n thành phần mà ta có thể bao hàm trong một quan hệ n – ngôi biểu diễn cơ sở dữ liệu đó.

Ví dụ 2.16. Các miền nào là khóa cơ bản đối với quan hệ n - ngôi được biểu diễn trong Bảng 2.3, khi giả thiết rằng không có bộ n thành phần nào sẽ được thêm vào trong tương lai.

Trong Bảng 2.3 chỉ có một bộ 9 thành phần đối với mỗi mã sinh viên nên miền Mã sinh viên là một khóa cơ bản. Tương tự, trong bảng đó chỉ có một bộ 9 thành phần đối với mỗi sinh viên nên miền Họ tên sinh viên cũng là một khóa cơ bản. Ngày sinh, số chứng minh nhân dân, email trong bảng này là duy nhất nên Ngày sinh, Số chứng minh nhân dân, Email cũng là các khóa cơ bản. Tuy nhiên, miền Ngành học, Năm vào học, Điểm trung bình chung tích lũy, Số tín chỉ tích lũy không phải là khóa cơ bản vì có chứa hơn một bộ 9 thành phần chứa cùng một ngành học, một năm vào học, một điểm trung bình chung tích lũy, cùng một số tín chỉ tích lũy.

Định nghĩa 2.14. Xét m số nguyên $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} \pi_{i_1 i_2 \dots i_m} : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n &\rightarrow A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_m} \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}) \end{aligned}$$

được gọi là một phép chiếu.

Nói cách khác, phép chiếu $\pi_{i_1 i_2 \dots i_m}$ xóa đi $n - m$ thành phần của bộ n thành phần, chỉ giữ lại các thành phần thứ $i_1, i_2, \dots, i_m$.

Định nghĩa 2.15. Nếu S là một quan hệ trên $A_1, A_2, \dots, A_n$ thì $\pi_{i_1 i_2 \dots i_m}(S)$ được gọi là quan hệ chiếu của S .

Chú ý 2.17. Quan hệ chiếu $\pi_{i_1 i_2 \dots i_m}(S)$ là một quan hệ trên $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$.

Ví dụ 2.18. Xác định quan hệ chiếu của quan hệ cho bởi Bảng 2.3 thông qua thực hiện phép chiếu $\pi_{1,6}$.

Khi dùng phép chiếu $\pi_{1,6}$ thì các cột thứ nhất và thứ 6 trong Bảng 2.3 sẽ được giữ lại, còn lại sẽ bị xóa đi. Do đó ta sẽ nhận được cặp biểu diễn mã số sinh viên và điểm trung bình chung tích lũy của sinh viên đó. Bảng 2.4 là kết quả của phép chiếu $\pi_{1,6}$.

Bảng 2.4.

Mã sinh viên	Điểm trung bình chung tích lũy
3220120004	3,22
3220120023	2,75
3220120029	3,25
3210120033	2,89
3230120034	2,75

Ví dụ 2.19. Xác định quan hệ chiếu của quan hệ cho bởi Bảng 2.3 thông qua thực hiện phép chiếu $\pi_{2,4,6,9}$.

Bảng 2.5 biểu diễn cho quan hệ chiếu thu được qua phép chiếu $\pi_{2,4,6,9}$ lên Bảng 2.3.

Bảng 2.5.

Họ tên sinh viên	Ngành học	Điểm trung bình chung tích lũy	Email
Trần Nguyễn Văn Anh	Giáo dục Tiểu học	3,22	3220120004@ued.udn.vn
Nguyễn Ngọc Sỹ	SPTH&CN tiểu học	2,75	3220120023@ued.udn.vn
Lê Thị Ngọc Hà	Giáo dục Tiểu học	3,25	3220120029@ued.udn.vn
Trần Thị Như Hoà	Toán học	2,89	3210120033@ued.udn.vn
Nguyễn Thị Hoa	Tin học	2,75	3230120034@ued.udn.vn

Chú ý 2.6. Cũng có thể xảy ra trường hợp một số bộ n thành phần trong quan hệ ban đầu có giá trị như nhau trong tất cả m thành phần của một phép chiếu và chỉ khác nhau đối với các thành phần bị xóa bởi phép chiếu đó. Khi đó, nếu thực hiện phép chiếu đó lên quan hệ ban đầu thì thu được quan hệ chiếu được biểu diễn qua bảng có số hàng ít đi. Chẳng hạn, xét ví dụ 2.4.5.

Ví dụ 2.20. Xác định quan hệ chiếu của quan hệ cho bởi Bảng 2.3 thông qua thực hiện phép chiếu $\pi_{5,6,7}$.

Bảng 2.6.

Năm vào học	Điểm trung bình chung tích lũy	Số tín chỉ tích lũy
2020	3,22	36
2020	2,75	36
2020	3,25	40
2020	2,89	38

Bảng 2.6 biểu diễn cho quan hệ chiếu thu được qua phép chiếu $\pi_{5,6,7}$ lên Bảng 2.3. Chú ý rằng sau khi phép chiếu được thực hiện, số dòng trong Bảng 2.6 sẽ ít hơn so với Bảng 2.3.

TIÊU KẾT CHƯƠNG 2

A. Hệ thống các nội dung trọng tâm

Trong chương này, chúng ta đã nghiên cứu các quan hệ trên cơ sở lý thuyết tập hợp. Các quan hệ n – ngôi được dùng để biểu diễn các cơ sở dữ liệu của máy tính. Thời gian đòi hỏi để thao tác thông tin trong một cơ sở dữ liệu phụ thuộc vào cách thông tin được lưu trữ như thế nào. Các phép thêm và xóa các bản ghi, cập nhật các bản ghi, tìm kiếm các bản ghi và tổ hợp các bản ghi từ các cơ sở dữ liệu chồng phủ lên nhau được thực hiện hàng triệu lần mỗi ngày trong một cơ sở dữ liệu lớn. Vì tầm quan trọng của các thao tác này, người ta đã phát triển các phương pháp khác nhau để biểu diễn các cơ sở dữ liệu. Trong chương này chúng ta đã tìm hiểu về phương pháp dựa trên khái niệm quan hệ, đó là mô hình quan hệ của dữ liệu được ứng dụng nhiều trong Tin học. Sau đây là một số thuật ngữ chính của chương 2:

Tích Descartes của hai tập hợp

Tích Descartes của n tập hợp

Quan hệ hai ngôi

Biểu diễn quan hệ dưới dạng đồ thị, bảng. Ma trận biểu diễn quan hệ.

Các tính chất của quan hệ hai ngôi: phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu.

Quan hệ tương đương

Lớp tương đương

Tập thương

Quan hệ thứ tự

Quan hệ thứ tự toàn phần

Tập sắp thứ tự

Các phần tử đặc biệt của tập sắp thứ tự và của tập con của một tập sắp thứ tự

Quan hệ n - ngôi

B. Nội dung thảo luận – Nhiệm vụ tự học

1. Quan hệ hai ngôi là gì? Cho các ví dụ về quan hệ hai ngôi giữa hai tập hợp, quan hệ hai ngôi xác định trên một tập hợp.
2. Các cách để biểu diễn quan hệ hai ngôi? Cho các ví dụ minh họa.
3. Một số tính chất của quan hệ hai ngôi là gì? Cho ví dụ minh họa tương ứng với mỗi tính chất đó.
4. Quan hệ tương đương, lớp tương đương, tập thương là gì? Cho các ví dụ minh họa.
5. Quan hệ thứ tự, tập sắp thứ tự, tập sắp thứ tự toàn phần, tập sắp thứ tự bộ phận, tập sắp tốt là gì? Cho các ví dụ minh họa.

6. So sánh sự khác nhau giữa quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự. Tìm ví dụ về một quan hệ hai ngôi vừa là quan hệ tương đương vừa là quan hệ thứ tự.
7. Các phần tử đặc biệt đối với tập sắp thứ tự, đối với tập con của tập sắp thứ tự là gì? Cho ví dụ minh họa tương ứng với mỗi khái niệm đó.
8. Quan hệ n - ngôi là gì? Cho ví dụ minh họa.

C. Bài tập Chương 2

2.1. Liệt kê các cặp sắp thứ tự trong quan hệ S giữa $X = \{0,1,2,3,4\}$ và $Y = \{0,1,2,3\}$, trong đó $(a,b) \in S$ nếu và chỉ nếu:

$$\begin{array}{ll} a) a = b & d) a + b = 4 \\ b) a > b & e) a \mid b \\ c) UCLN(a,b) = 1 & f) BCNN(a,b) = 2 \end{array}$$

2.2. Trên tập $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ xác định các quan hệ $S_1, S_2, \dots, S_5$ như sau:

- a) $a S_1 b \Leftrightarrow a = b$
- b) $a S_2 b \Leftrightarrow a \leq b$
- c) $a S_3 b \Leftrightarrow a < b$
- d) $a S_4 b \Leftrightarrow a$ chia hết cho b
- e) $a S_5 b \Leftrightarrow a + b$ là số chẵn

Hãy liệt kê các phần tử của các quan hệ đó.

2.3. Cho quan hệ $S = \{(a,b) \mid b \vdots a\}$ xác định trên tập $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- a) Liệt kê các cặp sắp thứ tự trong quan hệ S .
- b) Biểu diễn quan hệ trên bằng đồ thị.
- c) Biểu diễn quan hệ trên bằng bảng.
- d) Tìm ma trận biểu diễn quan hệ S .

2.4. Cho các quan hệ trên tập $X = \{1,2,3,4\}$, hãy xác định các quan hệ có tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu.

- a) $\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$
- b) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- c) $\{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
- d) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- e) $\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$
- f) $\{(2,4), (4,2)\}$

2.5. Cho $X = \{0, 1, 2\}$. Mỗi phát biểu sau xác định một quan hệ S trên X bởi xSy nếu khẳng định là đúng đối với $x, y \in X$. Viết mỗi quan hệ như một tập hợp các cặp sắp thứ tự.

$$\begin{array}{lll} a) m \leq n & d) mn = 0 & g) m^2 + n^2 = 2 \\ b) m < n & e) mn = m & h) m^2 + n^2 = 3 \\ c) m = n & f) m + n \in X & i) m = \max\{n, 1\} \end{array}$$

Các quan hệ nào có tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu? Viết ma trận và vẽ các đồ thị tương ứng.

2.6. Cho ma trận của các quan hệ sau:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vẽ đồ thị của các quan hệ trên. Quan hệ nào có tính chất bắc cầu?

2.7. Quan hệ S trên $\mathbb{Z}$ được định nghĩa bởi:

$$mSn \text{ nếu và chỉ nếu } m + n = 0 \pmod{3}$$

S có tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu không? Vì sao?

2.8. Với $m, n \in \mathbb{Z}$, định nghĩa quan hệ $S: mSn$ nếu $m - n$ lẻ. S có tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu không? Vì sao?

2.9. Xác định xem quan hệ S trên tập mọi người có tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu không, trong đó $(a, b) \in S$ nếu và chỉ nếu:

- a) a cao hơn b .
- b) a và b có cùng ngày sinh.
- c) a và b cùng tên.
- d) a và b có cùng một ông.

2.10. Trên tập X tất cả các trẻ em xác định quan hệ $\mathcal{R}$ như sau:

$$\forall a, b \in X, a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a, b \text{ có cùng bố và cùng mẹ.}$$

- a) Chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương.
- b) Kết luận trên có còn đúng không với quan hệ $\mathcal{R}'$ xác định sau đây:

$$\forall a, b \in X, a \mathcal{R}' b \Leftrightarrow a, b \text{ có cùng bố hoặc cùng mẹ.}$$

2.11. Trong tập $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ xác định một quan hệ hai ngôi S như sau:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x_1, y_1) S (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- a) Chứng minh rằng S là quan hệ tương đương trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- b) Xác định lớp tương đương $[(a, b)]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ và tập thương $\mathbb{R}^2 / S$? Hãy biểu diễn hình học tập thương này.

2.12. Cho X là tập các điểm trên mặt phẳng, O là một điểm trước thuộc X . Trên tập X xác định các quan hệ S_1 , S_2 và S_3 như sau:

$$\forall M, N \in X, M S_1 N \Leftrightarrow OM = ON$$

$$\forall M, N \in X, M S_2 N \Leftrightarrow O, M, N \text{ thẳng hàng}$$

$$\forall M, N \in X \setminus \{O\}, M S_3 N \Leftrightarrow O, M, N \text{ thẳng hàng}$$

Trong các quan hệ ở trên, quan hệ nào là quan hệ tương đương? Tìm tập thương.

2.13. Trên tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên xác định các quan hệ S như sau:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a S_1 b \Leftrightarrow a, b \text{ có ước số chung là } p \text{ (} p \text{ không đổi, } p \neq 1)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a S_2 b \Leftrightarrow a + b \text{ là số tự nhiên chẵn.}$$

Trong các quan hệ ở trên, quan hệ nào là quan hệ thứ tự, quan hệ nào là quan hệ tương đương? Tìm tập thương của các quan hệ tương đương.

2.14. Trên tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên, xác định quan hệ $*$ và $\mathcal{R}$ như sau:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a * b \Leftrightarrow a = b = 0 \text{ hoặc } a, b \text{ cùng dấu.}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3} \Leftrightarrow (a - b) \text{ chia hết cho } 3$$

a) Chứng minh $*$ là quan hệ tương đương. Tìm tập thương $\mathbb{Z} / *$

b) Chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương. Tìm tập thương $\mathbb{Z} / \mathcal{R}$.

2.15. Xét quan hệ $\equiv \pmod{4}$ trên tập $\mathbb{Z}$: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{4} \Leftrightarrow (a - b) : 4$

a) Chứng minh $\equiv \pmod{4}$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$.

b) Tìm lớp tương đương $\overline{3}$.

c) Tìm tập thương của $\mathbb{Z}$ theo $\equiv \pmod{4}$.

2.16. Xét quan hệ $\equiv \pmod{7}$ trên tập $\mathbb{Z}$: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{7} \Leftrightarrow (a - b) : 7$

a) Chứng minh $\equiv \pmod{7}$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$.

b) Tìm lớp tương đương $\overline{3}$.

c) Tìm tập thương của $\mathbb{Z}$ theo $\equiv \pmod{7}$.

2.17. Xét quan hệ hai ngôi $\sim$ trên tập $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*: (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

a) Chứng minh $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

b) Tìm lớp tương đương $\overline{(3, 1)}$.

c) Tìm lớp tương đương $\overline{(4, 9)}$.

2.18. Xét quan hệ hai ngôi $\sim$ trên tập $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

a) Chứng minh $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Tìm lớp tương đương $\overline{(3,1)}$.

c) Tìm lớp tương đương $\overline{(2,7)}$.

2.19. Trong tập hợp $\wp(X)$ gồm các tập con của tập hợp X , quan hệ S được cho như sau:

$$\forall A, B \in \wp(X), ASB \Leftrightarrow A \subset B$$

a) Chứng minh rằng S là một qua hệ thứ tự. Với điều kiện nào của X thì S là quan hệ thứ tự toàn phần?

b) Tìm phần tử nhỏ nhất, lớn nhất, tối đại, tối tiểu của tập hợp $\wp(X)$ đối với quan hệ S .

2.20. Trong tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ cho quan hệ S_1, S_2

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a S_1 b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a S_2 b \Leftrightarrow a^3 \leq b^3$$

Quan hệ nào là quan hệ thứ tự? Quan hệ nào là quan hệ thứ tự toàn phần?

2.21. Giả sử $A_1 = \{U, V, W, X, Y, Z\}$ (mã số của các loại ngũ cốc),

$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \mathbb{Z}^+$. Xét quan hệ S giữa các tập A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cho bởi bảng dưới đây:

Mã số	Lượng đường/đvtt	Lượng vitamin A/đvtt	Lượng vitamin C/đvtt	Lượng protein/đvtt
U	1	25	25	6
V	7	25	2	4
W	12	25	2	4
X	0	60	40	20
Y	3	25	40	10
Z	2	25	40	10

a) Hãy tìm quan hệ chiếu của S khi thực hiện phép chiếu $\pi_{3,4,5}$.

b) Hãy tìm quan hệ chiếu của S khi thực hiện phép chiếu $\pi_{1,4}$.

c) Hãy tìm quan hệ chiếu của S khi thực hiện phép chiếu $\pi_{1,3,4,5}$.

d) Hãy tìm các khóa cơ bản của S .

2.22. Xét quan hệ S cho bởi bảng sau:

Hãng hàng không	Số chuyến	Cửa	Nơi đến	Thời gian cất
-----------------	-----------	-----	---------	---------------

	bay			cánh
Nadir	122	34	Detroit	8:00AM
Acme	221	22	Denver	8:17AM
Acme	122	33	Anchorage	8:22AM
Acme	323	34	Honolulu	8:30AM
Nadir	199	13	Detroit	8:47AM
Acme	222	22	Denver	9:10AM
Nadir	322	34	Detroit	9:44AM

- Hãy sẽ nhận được gì khi thực hiện phép chiếu $\pi_{2,3,5}$ lên quan hệ S .
- Hãy tìm quan hệ chiếu của S khi thực hiện phép chiếu $\pi_{1,2,4}$.
- Hãy tìm quan hệ chiếu của S khi thực hiện phép chiếu $\pi_{1,4}$.
- Cần phải dùng phép chiếu nào để xóa các thành phần thứ nhất, thứ hai và thứ tư của một bộ gồm 6 thành phần?
- Hãy tìm các khóa cơ bản của S .

CHƯƠNG 3. THUẬT TOÁN VÀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

3.1. Thuật toán

3.1.1. Thuật toán và cách biểu diễn thuật toán

3.1.1.1. Khái niệm thuật toán

Trong toán học và khoa học máy tính, một thuật toán, còn gọi là giải thuật, là một tập hợp hữu hạn các hướng dẫn được xác định rõ ràng, có thể thực hiện được bằng máy tính, thường để giải quyết một lớp vấn đề hoặc để thực hiện một phép tính. Các thuật toán luôn rõ ràng và được sử dụng chỉ rõ việc thực hiện các phép tính, xử lý dữ liệu, suy luận tự động và các tác vụ khác.

Khái niệm thuật toán đã tồn tại từ thời cổ đại. Các thuật toán số học, chẳng hạn như thuật toán chia, được sử dụng bởi các nhà toán học Babylon cổ đại vào khoảng 2500 TCN và các nhà toán học Ai Cập vào khoảng 1550 TCN. Các nhà toán học Hy Lạp sau đó đã sử dụng các thuật toán trong sàng Eratosthenes để tìm số nguyên tố, và thuật toán Euclide để tìm ước chung lớn nhất của hai số. Các nhà toán học Ả Rập như al-Kindi vào thế kỷ thứ 9 đã sử dụng các thuật toán mật mã để phá mã, dựa trên phân tích tần số.

Có nhiều khái niệm khác nhau, trên cơ sở đó ta đi đến khái niệm về thuật toán như sau: *Thuật toán là một bảng liệt kê các chỉ dẫn (hay quy tắc) cần thực hiện theo từng bước xác định nhằm giải một bài toán đã cho.*

Để trình bày thuật toán người ta có thể: dùng ngôn ngữ tự nhiên, ngôn ngữ lưu đồ (sơ đồ khối), ngôn ngữ lập trình. Thuật toán ngoài việc được trình bày bằng ngôn ngữ tự nhiên cùng với những kí hiệu toán học quen thuộc còn dùng một dạng giả mã để mô tả thuật toán. Giả mã tạo ra bước trung gian giữa sự mô tả một thuật toán bằng ngôn ngữ thông thường và sự thực hiện thuật toán đó trong ngôn ngữ lập trình. Các bước của thuật toán được chỉ rõ bằng cách dùng các lệnh như trong các ngôn ngữ lập trình.

Ví dụ 3.1.

Thuật toán giải phương trình bậc nhất

** Phương pháp liệt kê*

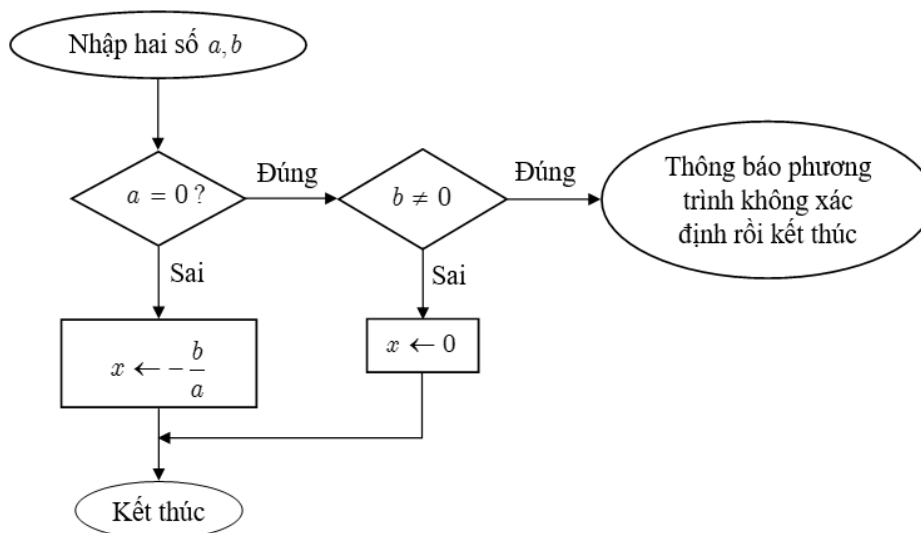
Bước 1: Nhập hai số thực a, b ;

Bước 2: Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì thông báo vô nghiệm rồi kết thúc;

Bước 3: Nếu $a = 0, b = 0$ thì thông báo phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị rồi kết thúc;

Bước 4: Nếu $a \neq 0$ thì $x = -\frac{b}{a}$ thông báo phương trình có nghiệm duy nhất là x rồi kết thúc.

** Phương pháp sơ đồ khối*



Hình 3.1. Sơ đồ khối thuật toán giải phương trình bậc nhất

Ví dụ 3.2. Mô tả thuật toán tìm phần tử lớn nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên.

Dùng ngôn ngữ tự nhiên để mô tả các bước cần phải thực hiện:

Bước 1: Đặt giá trị cực đại tạm thời bằng số nguyên đầu tiên trong dãy.

Bước 2: So sánh số nguyên tiếp sau với giá trị cực đại tạm thời, nếu nó lớn hơn giá trị cực đại tạm thời thì đặt cực đại tạm thời bằng số nguyên đó.

Bước 3: Lặp lại bước trước nếu còn các số nguyên trong dãy.

Bước 4: Dừng khi không còn số nguyên nào nữa trong dãy. Cực đại tạm thời ở điểm này chính là số nguyên lớn nhất của dãy.

Ví dụ 3.3. Mô tả thuật toán giải phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$

** Phương pháp liệt kê*

Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c .

Bước 2: Kiểm tra xem hệ số a có khác 0 hay không? Nếu $a = 0$ quay lại thực hiện bước 1.

Bước 3: Tính biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Bước 4: Nếu $\Delta < 0$ thông báo “phương trình vô nghiệm” và chuyển đến bước 8.

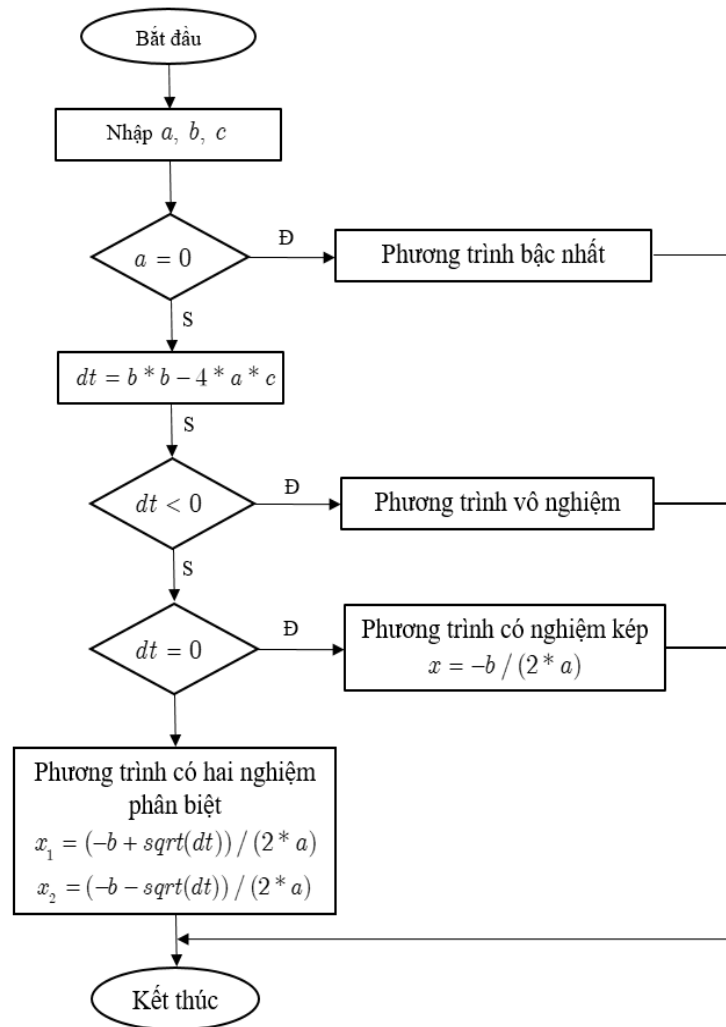
Bước 5: Nếu $\Delta = 0$, tính $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ và chuyển sang bước 7.

Bước 6: Tính $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ và chuyển sang bước 7.

Bước 7: Thông báo các nghiệm x_1, x_2 .

Bước 8: Kết thúc thuật toán.

*Phương pháp sơ đồ khối



Hình 3.2. Sơ đồ khối thuật toán giải phương trình bậc hai

3.1.1.2. Các đặc trưng của thuật toán

- Đầu vào (Input): Một thuật toán có các giá trị đầu vào từ một tập đã được chỉ rõ.
- Đầu ra (Output): Từ mỗi tập các giá trị đầu vào, thuật toán sẽ tạo ra các giá trị đầu ra. Các giá trị đầu ra chính là nghiệm của bài toán.
- Tính dừng: Sau một số hữu hạn bước thuật toán phải dừng.
- Tính xác định: Ở mỗi bước, các bước thao tác phải hết sức rõ ràng, không gây nên sự nhập nhằng. Nói rõ hơn, trong cùng một điều kiện hai bộ xử lý cùng thực hiện một bước của thuật toán phải cho những kết quả như nhau.

- Tính hiệu quả: Trước hết thuật toán cần đúng đắn, nghĩa là sau khi đưa dữ liệu vào thuật toán hoạt động và đưa ra kết quả như ý muốn.

- Tính phổ dụng: Thuật toán có thể giải bất kỳ một bài toán nào trong lớp các bài toán. Cụ thể là thuật toán có thể có các đầu vào là các bộ dữ liệu khác nhau trong một miền xác định.

3.1.2. Độ phức tạp của thuật toán

3.1.2.1. Khái niệm về độ phức tạp của một thuật toán

Thước đo hiệu quả của một thuật toán là thời gian mà máy tính sử dụng để giải bài toán theo thuật toán đang xét, khi các giá trị đầu vào có một kích thước xác định.

Một thước đo thứ hai là dung lượng bộ nhớ đòi hỏi để thực hiện thuật toán khi các giá trị đầu vào có kích thước xác định.

Sự phân tích thời gian cần thiết để giải một bài toán có kích thước đặc biệt nào đó liên quan đến độ phức tạp thời gian của thuật toán. Sự phân tích bộ nhớ cần thiết của máy tính liên quan đến độ phức tạp không gian của thuật toán. Việc xem xét độ phức tạp thời gian và không gian của một thuật toán là một vấn đề rất thiết yếu khi các thuật toán được thực hiện. Biết một thuật toán sẽ đưa ra đáp số trong một micro giây, trong một phút hoặc trong một tỉ năm, hiển nhiên là hết sức quan trọng. Tương tự như vậy, dung lượng bộ nhớ đòi hỏi phải là khả dụng để giải một bài toán, vì vậy độ phức tạp không gian cũng cần phải tính đến. Vì việc xem xét độ phức tạp không gian gắn liền với các cấu trúc dữ liệu đặc biệt được dùng để thực hiện thuật toán nên ở đây ta sẽ tập trung xem xét độ phức tạp thời gian.

Độ phức tạp thời gian của một thuật toán có thể được biểu diễn qua số các phép toán được dùng bởi thuật toán đó khi các giá trị đầu vào có một kích thước xác định. Sở dĩ độ phức tạp thời gian được mô tả thông qua số các phép toán đòi hỏi thay vì thời gian thực của máy tính là bởi vì các máy tính khác nhau thực hiện các phép tính sơ cấp trong những khoảng thời gian khác nhau. Hơn nữa, phân tích tất cả các phép toán thành các phép tính bit sơ cấp mà máy tính sử dụng là điều rất phức tạp.

Các phép toán được dùng để đo độ phức tạp thời gian của thuật toán là phép so sánh số nguyên; các phép cộng, trừ, nhân, chia các số nguyên hoặc bất kỳ một phép tính sơ cấp nào khác xuất hiện trong quá trình tính toán.

Một trong những khái niệm thường dùng để phân tích độ tăng của một hàm là khái niệm “O” được định nghĩa như sau:

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm từ các tập số nguyên dương $\mathbb{Z}^*$ hoặc tập các số thực $\mathbb{R}$ vào tập các số thực $\mathbb{R}$. Ta nói $f(x)$ là $O(g(x))$ nếu tồn tại hai hằng số C và k sao cho $|f(x)| \leq C|g(x)|$ với mọi $x > k$.

Ví dụ 3.4. Cho $f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Khi đó ta có $f(n) < n + n + n + \dots + n = n.n = n^2$ nên $f(n)$ là $O(n^2)$ với $C = k = 1$.

Ví dụ 3.5. Hàm $f(n) = n!$ là $O(n^n)$

Thật vậy, ta có $n! < n^n$ nên $n!$ là $O(n^n)$ với $C = k = 1$.

Ví dụ 3.6. Hàm $f(n) = \log n$ là $O(n)$

Thật vậy, ta có $n < 2^n$ với mọi $n \geq 1$ nên $\log n < n$

Vậy $f(n) = \log n$ là $O(n)$ với $C = k = 1$.

* Các thuật ngữ thường dùng cho độ phức tạp của một thuật toán:

$O(1)$: Độ phức tạp hằng số; $O(\log n)$: Độ phức tạp lôgarit; $O(n)$: Độ phức tạp tuyến tính; $O(n \log n)$: Độ phức tạp $n \log n$; $O(n^b)$: Độ phức tạp đa thức; $O(b^n)$ ($b > 1$): Độ phức tạp hàm mũ; $O(n!)$: Độ phức tạp giai thừa.

Thời gian máy tính được dùng bởi một thuật toán:

Kích thước của bài toán	Các phép tính bit được sử dụng					
n	$\log n$	N	$n \log n$	n^2	2^n	$n!$
10	$3.10^{-9}s$	$10^{-8}s$	$3.10^{-8}s$	$10^{-7}s$	$10^{-6}s$	$3.10^{-3}s$
102	$7.10^{-9}s$	$10^{-7}s$	$7.10^{-7}s$	$10^{-5}s$	4.10^{13} năm	*
103	$10^{-8}s$	$10^{-6}s$	$10^{-5}s$	$10^{-3}s$	*	*
104	$1,3.10^{-8}s$	$10^{-5}s$	$10^{-4}s$	$10^{-1}s$	*	*
105	$1,7.10^{-8}s$	$10^{-4}s$	$2.10^{-3}s$	$10 s$	*	*
106	$2.10^{-8}s$	$10^{-3}s$	$2.10^{-2}s$	$17 m$	*	*

Ví dụ 3.7. Xét thuật toán tìm số lớn nhất trong dãy n số $a_1, a_2, \dots, a_n$. Có thể coi kích thước của dữ liệu nhập là số lượng phần tử của dãy số, tức là n . Nếu coi mỗi lần so sánh hai số của thuật toán đòi hỏi một đơn vị thời gian (giây chẳng hạn) thì thời

gian thực hiện thuật toán trong trường hợp xấu nhất là $n - 1$ giây. Với dãy 64 số, thời gian thực hiện thuật toán không quá 63 giây.

3.1.2.2. Minh họa độ phức tạp của các thuật toán

Ví dụ 3.8. Mô tả thuật toán tìm phần tử lớn nhất của dãy hữu hạn các số nguyên và tìm độ phức tạp của thuật toán đó

Bước 1. Đặt giá trị cực đại tạm thời bằng số nguyên đầu tiên của dãy.

Bước 2. So sánh số nguyên tiếp theo với giá trị tạm thời, nếu nó lớn hơn giá trị cực đại tạm thời thì đặt cực đại tạm thời bằng số nguyên đó.

Bước 3. Lặp lại bước 2 (nếu còn các số nguyên trong dãy).

Bước 4. Dừng khi không còn số nguyên nào trong dãy. Khi đó cực đại tạm thời chính là số nguyên lớn nhất trong dãy.

Nhận xét: Mỗi số hạng của dãy dùng hai phép so sánh, một để xác định chưa đạt đến cuối dãy, một để xác định có phải nó là giá trị lớn nhất tạm thời hay không. Việc so sánh này được dùng cho mỗi phần tử a_i trong dãy từ phần tử thứ hai trở đi ($i = 2; 3; \dots; n$). Sau đó là phép so sánh để thoát khỏi vòng lặp, nên số phép so sánh cần dùng tất cả là $2(n - 1) + 1$. Vậy thuật toán có độ phức tạp là $O(n)$.

Vậy để so sánh độ phức tạp của các thuật toán, điều tiện lợi là coi độ phức tạp của mỗi thuật toán như là cấp của hàm biểu hiện thời gian thực hiện thuật toán ấy.

Chú ý: Đánh giá độ phức tạp của một thuật toán

a) Thuật toán tìm kiếm tuyến tính: Số các phép so sánh được dùng trong thuật toán này cũng sẽ được xem như thước đo độ phức tạp thời gian của nó. Ở mỗi một bước của vòng lặp trong thuật toán, có hai phép so sánh được thực hiện: một để xem đã tới cuối bảng chưa và một để so sánh phần tử x với một số hạng của bảng. Cuối cùng còn một phép so sánh nữa làm ở ngoài vòng lặp. Do đó, nếu $x = a_i$, thì đã có $2i + 1$ phép so sánh được sử dụng. Số phép so sánh nhiều nhất, $2n + 2$, đòi hỏi phải được sử dụng khi phần tử x không có mặt trong bảng. Từ đó, thuật toán tìm kiếm tuyến tính có độ phức tạp là $O(n)$.

b) Thuật toán tìm kiếm nhị phân: Để đơn giản, ta giả sử rằng có $n = 2k$ phần tử trong bảng liệt kê $a_1, a_2, \dots, a_n$, với k là số nguyên không âm (nếu n không phải là lũy thừa của 2, ta có thể xem bảng là một phần của bảng gồm $2k + 1$ phần tử, trong đó k là số nguyên nhỏ nhất sao cho $n < 2k + 1$).

Ở mỗi giai đoạn của thuật toán vị trí của số hạng đầu tiên i và số hạng cuối cùng j của bảng còn hạn chế tìm kiếm ở giai đoạn đó được so sánh để xem bảng này còn nhiều hơn một phần tử hay không. Nếu $i < j$, một phép so sánh sẽ được làm để xác định x có lớn hơn số hạng ở giữa của bảng còn hạn chế hay không. Như vậy ở mỗi giai đoạn, có sử dụng hai phép so sánh. Khi trong bảng chỉ còn một phần tử, một phép so sánh sẽ cho chúng ta biết rằng không còn một phần tử nào thêm nữa và một phép so sánh nữa cho biết số hạng đó có phải là x hay không. Tóm lại cần phải có nhiều nhất $2k + 2 = 2\log_2 n + 2$ phép so sánh để thực hiện phép tìm kiếm nhị phân (nếu n không phải là lũy thừa của 2, bảng gốc sẽ được mở rộng tới bảng có $2k + 1$ phần tử, với $k = \lceil \log_2 n \rceil$ và sự tìm kiếm đòi hỏi phải thực hiện nhiều nhất $2\lceil \log_2 n \rceil + 2$ phép so sánh. Do đó thuật toán tìm kiếm nhị phân có độ phức tạp là $O(\log_2 n)$. Từ sự phân tích ở trên suy ra rằng thuật toán tìm kiếm nhị phân, ngay cả trong trường hợp xấu nhất, cũng hiệu quả hơn thuật toán tìm kiếm tuyến tính.

c) Một điều quan trọng cần quan tâm là máy tính phải cần bao lâu để giải xong một bài toán. Ví dụ, nếu một thuật toán đòi hỏi 10 giờ, thì có thể còn đáng chi phí thời gian máy tính đòi hỏi để giải bài toán đó. Nhưng nếu một thuật toán đòi hỏi vài tỉ năm để giải một bài toán, thì thực hiện thuật toán đó sẽ là một điều phi lí. Một trong những hiện tượng lí thú nhất của công nghệ hiện đại là sự tăng đáng kể của tốc độ và lượng bộ nhớ trong máy tính. Một nhân tố quan trọng khác làm giảm thời gian cần thiết để giải một bài toán là sự xử lí song song, đây là kĩ thuật thực hiện đồng thời các dãy phép tính. Do sự tăng tốc độ tính toán và dùng lượng bộ nhớ của máy tính, cũng như nhờ việc dùng các thuật toán lợi dụng được ưu thế của kĩ thuật xử lí song song, các bài toán vài năm trước đây được xem là không thể giải được, thì hiện nay có thể giải bình thường.

3.1.3. Một số thuật toán số học

3.1.3.1. Thuật toán Euclide

Phương pháp tính ước chung lớn nhất của hai số bằng cách dùng phân tích các số nguyên đó ra thừa số nguyên tố là không hiệu quả. Lí do là ở chỗ thời gian phải tiêu tốn cho sự phân tích đó. Dưới đây là phương pháp hiệu quả hơn để tìm ước số chung lớn nhất, gọi là thuật toán Euclide. Thuật toán này đã biết từ thời cổ đại. Nó mang tên nhà toán học cổ Hy Lạp Euclide, người đã mô tả thuật toán này trong cuốn sách “Những yếu tố” nổi tiếng của ông. Thuật toán Euclide dựa vào 2 mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 3.1. (Thuật toán chia). Cho a và b là hai số nguyên và $b \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất hai số nguyên q và r sao cho

$$a = b.q + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Trong đẳng thức trên, b được gọi là số chia, a được gọi là số bị chia, q được gọi là thương số và r được gọi là số dư.

Khi b là nguyên dương, ta kí hiệu số dư r trong phép chia a cho b là $a \bmod b$.

Mệnh đề 3.2. Cho $a = b.q + r$, trong đó a, b, q, r là các số nguyên. Khi đó

$$\text{ƯCLN}(a, b) = \text{ƯCLN}(b, r).$$

Giả sử a và b là hai số nguyên dương với $a \geq b$. Đặt $r_0 = a$ và $r_1 = b$. Bằng cách áp dụng liên tiếp thuật toán chia, ta tìm được:

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_n.$$

Cuối cùng, số dư 0 sẽ xuất hiện trong dãy các phép chia liên tiếp, vì dãy các số dư $a = r_0 > r_1 > r_2 > \dots \geq 0$ không thể chứa quá a số hạng được. Hơn nữa, từ **Mệnh đề 3.2** ở trên ta suy ra:

$$\begin{aligned} \text{ƯCLN}(a, b) &= \text{ƯCLN}(r_0, r_1) = \text{ƯCLN}(r_1, r_2) = \dots = \\ &= \text{ƯCLN}(r_{n-1}, r_n) = \text{ƯCLN}(r_n, r_n) = r_n. \end{aligned}$$

Do đó, ƯCLN là số dư khác không cuối cùng trong dãy các phép chia.

Ví dụ 3.9. Dùng thuật toán Euclide tìm ƯCLN $(414, 662)$.

$$662 = 441.1 + 248$$

$$414 = 248.1 + 166$$

$$248 = 166.1 + 82$$

$$166 = 82.2 + 2$$

$$82 = 2.41.$$

Do đó, $\text{ƯCLN}(414, 662) = 2$.

Trong thuật toán trên, các giá trị ban đầu của x và y tương ứng là a và b . Ở mỗi giai đoạn của thủ tục, x được thay bằng y và y được thay bằng $x \bmod y$. Quá

trình này được lặp lại chừng nào $y \neq 0$. Thuật toán sẽ ngừng khi $y = 0$ và giá trị của x ở điểm này, đó là số dư khác không cuối cùng trong thủ tục, cũng chính là ước chung lớn nhất của a và b .

3.1.3.2. Thuật toán biểu diễn các số nguyên

Mệnh đề 3.3. Cho b là một số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó nếu n là một số nguyên dương, nó có thể được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0.$$

Ở đây k là một số tự nhiên, $a_0, a_1, \dots, a_k$ là các số tự nhiên nhỏ hơn b và $a_k \neq 0$.

Biểu diễn của n được cho trong **Mệnh đề 3.3** được gọi là khai triển của n theo cơ số b , kí hiệu là $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$. Bây giờ ta sẽ mô tả thuật toán xây dựng khai triển cơ số b của số nguyên n bất kì. Trước hết ta chia n cho b để được thương và số dư, tức là

$$n = bq_0 + a_0, \quad 0 \leq a_0 < b.$$

Số dư a_0 chính là chữ số đứng bên phải cùng trong khai triển cơ số b của n .

Tiếp theo chia q_0 cho b , ta được:

$$q_0 = bq_1 + a_1, \quad 0 \leq a_1 < b.$$

Số dư a_1 chính là chữ số thứ hai tính từ bên phải trong khai triển cơ số b của n . Tiếp tục quá trình này, bằng cách liên tiếp chia các thương cho b ta sẽ được các chữ số tiếp theo trong khai triển cơ số b của n là các số dư tương ứng. Quá trình này sẽ kết thúc khi ta nhận được một thương bằng 0.

Ví dụ 3.10. Tìm khai triển cơ số 8 của $(12345)_{10}$.

$$12345 = 8 \cdot 1543 + 1$$

$$1543 = 8 \cdot 192 + 7$$

$$192 = 8 \cdot 24 + 0$$

$$24 = 8 \cdot 3 + 0$$

$$3 = 8 \cdot 0 + 3$$

Do đó, $(12345)_{10} = (30071)_8$.

3.1.3.3. Thuật toán cho các phép tính số nguyên

Các thuật toán thực hiện các phép tính với những số nguyên khi dùng các khai triển nhị phân của chúng là cực kì quan trọng trong số học của máy tính. Ta sẽ mô tả ở

đây các thuật toán cộng và nhân hai số nguyên trong biểu diễn nhị phân. Ta cũng sẽ phân tích độ phức tạp tính toán của các thuật toán này thông qua số các phép toán bit thực sự được dùng. Giả sử khai triển nhị phân của hai số nguyên dương a và b là:

$$a = (a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_2 \text{ và } b = (b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0)_2$$

sao cho a và b đều có n bit (đặt các bit 0 ở đầu mỗi khai triển đó, nếu cần).

1) Phép cộng: Xét bài toán cộng hai số nguyên viết ở dạng nhị phân. Thủ tục thực hiện phép cộng có thể dựa trên phương pháp thông thường là cộng cặp chữ số nhị phân với nhau (có nhớ) để tính tổng của hai số nguyên.

Để cộng a và b , trước hết cộng hai bit ở phải cùng của chúng, tức là:

$$a_0 + b_0 = c_0 \cdot 2 + s_0.$$

Ở đây s_0 là bit phải cùng trong khai triển nhị phân của $a + b$, c_0 là số nhớ, nó có thể bằng 0 hoặc 1. Sau đó ta cộng hai bit tiếp theo và số nhớ

$$a_1 + b_1 + c_0 = c_1 \cdot 2 + s_1.$$

Ở đây s_1 là bit tiếp theo (tính từ bên phải) trong khai triển nhị phân của $a + b$ và c_1 là số nhớ. Tiếp tục quá trình này bằng cách cộng các bit tương ứng trong hai khai triển nhị phân và số nhớ để xác định bit tiếp sau tính từ bên phải trong khai triển nhị phân của tổng $a + b$. Ở giai đoạn cuối cùng, cộng a_{n-1} , b_{n-1} và c_{n-1} để nhận được $c_{n-1} \cdot 2 + s_{n-1}$. Bit đứng đầu của tổng là $s_n = c_{n-1}$. Kết quả, thủ tục này tạo ra được khai triển nhị phân của tổng, cụ thể là $a + b = (s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_1 s_0)_2$.

Ví dụ 3.11. Tìm tổng của $a = (11011)_2$ và $b = (10110)_2$.

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= 1 + 0 = 0 \cdot 2 + 1 (c_0 = 0, s_0 = 1), \quad a_1 + b_1 + c_0 = 1 + 1 + 0 = 1 \cdot 2 + 0 (c_1 = 1, \\ s_1 &= 0), \quad a_2 + b_2 + c_1 = 0 + 1 + 1 = 1 \cdot 2 + 0 (c_2 = 1, s_2 = 0), \quad a_3 + b_3 + c_2 = 1 + 0 + 1 = \\ 1 \cdot 2 + 0 (c_3 &= 1, s_3 = 0), \quad a_4 + b_4 + c_3 = 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 2 + 1 (s_5 = c_4 = 1, s_4 = 1). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó, } a + b = (110001)_2.$$

Tổng hai số nguyên được tính bằng cách cộng liên tiếp các cặp bit và khi cần phải cộng cả số nhớ nữa. Cộng một cặp bit và số nhớ đòi ba hoặc ít hơn phép cộng các

bit. Như vậy, tổng số các phép cộng bit được sử dụng nhỏ hơn ba lần số bit trong khai triển nhị phân. Do đó, độ phức tạp của thuật toán này là $O(n)$.

2) Phép nhân: Xét bài toán nhân hai số nguyên viết ở dạng nhị phân. Thuật toán thông thường tiến hành như sau. Dùng luật phân phối, ta có:

$$ab = a \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j = \sum_{j=0}^{n-1} a(b_j 2^j).$$

Ta có thể tính ab bằng cách dùng phương trình trên. Trước hết, ta thấy rằng $ab_j = a$ nếu $b_j = 1$ và $ab_j = 0$ nếu $b_j = 0$. Mỗi lần ta nhân một số hạng với 2 là ta dịch khai triển nhị phân của nó một chỗ về phía trái bằng cách thêm một số không vào cuối khai triển nhị phân của nó. Do đó, ta có thể nhận được $(ab_j)2^j$ bằng cách dịch khai triển nhị phân của ab_j đi j chỗ về phía trái, tức là thêm j số không vào cuối khai triển nhị phân của nó. Cuối cùng, ta sẽ nhận được tích ab bằng cách cộng n số nguyên $ab_j.2^j$ với $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Thuật toán trên tính tích của hai số nguyên a và b bằng cách cộng các tích riêng phần $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Khi $b_j = 1$, ta tính tích riêng phần c_j bằng cách dịch khai triển nhị phân của a đi j bit. Khi $b_j = 0$ thì không cần có dịch chuyển nào vì $c_j = 0$. Do đó, để tìm tất cả n số nguyên $ab_j.2^j$ với $j = 0, 1, \dots, n-1$, đòi hỏi tối đa là

$$0 + 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

phép dịch chỗ. Vì vậy, số các dịch chuyển chỗ đòi hỏi là $O(n^2)$.

Để cộng các số nguyên ab_j từ $j = 0$ đến $n-1$, đòi hỏi phải cộng một số nguyên n bit, một số nguyên $n+1$ bit, ... và một số nguyên $2n$ bit. Ta đã biết rằng mỗi phép cộng đó đòi hỏi $O(n)$ phép cộng bit. Do đó, độ phức tạp của thuật toán này là $O(n^2)$.

3.1.4. Thuật toán đệ quy

3.1.4.1. Khái niệm đệ quy

Đôi khi chúng ta có thể quy việc giải bài toán với tập các dữ liệu đầu vào xác định về việc giải cùng bài toán đó nhưng với các giá trị đầu vào nhỏ hơn. Chẳng hạn, bài toán tìm ước chung lớn nhất (UCLN) của hai số a, b với $a > b$ có thể rút gọn về

bài toán tìm ƯCLN của hai số nhỏ hơn, $a \bmod b$ và b . Khi việc rút gọn như vậy thực hiện được thì lời giải bài toán ban đầu có thể tìm được bằng một dãy các phép rút gọn cho tới những trường hợp mà ta có thể dễ dàng nhận được lời giải của bài toán. Ta sẽ thấy rằng các thuật toán rút gọn liên tiếp bài toán ban đầu tới bài toán có dữ liệu đầu vào nhỏ hơn, được áp dụng trong một lớp rất rộng các bài toán.

Định nghĩa 3.1. Một thuật toán được gọi là đệ quy nếu nó giải bài toán bằng cách rút gọn liên tiếp bài toán ban đầu tới bài toán cũng như vậy nhưng có dữ liệu đầu vào nhỏ hơn.

Ví dụ 3.12. Tìm thuật toán đệ quy tính giá trị a_n với a là số thực khác không và n là số nguyên không âm.

Ta xây dựng thuật toán đệ quy nhờ định nghĩa đệ quy của a_n , đó là $a_{n+1} = a \cdot a_n$ với $n > 0$ và khi $n = 0$ thì $a_0 = 1$. Vậy để tính a_n ta quy về các trường hợp có số mũ n nhỏ hơn, cho tới khi $n = 0$.

Ví dụ 3.13. Hãy biểu diễn thuật toán tìm kiếm tuyến tính như một thủ tục đệ quy.

Để tìm x trong dãy tìm kiếm $a_1, a_2, \dots, a_n$ trong bước thứ của thuật toán ta so sánh x với a_i . Nếu x bằng a_i thì i là vị trí cần tìm, ngược lại thì việc tìm kiếm được quy về dãy có số phần tử ít hơn, cụ thể là dãy a_{i+1}, a_n . Thuật toán tìm kiếm có dạng thủ tục đệ quy như sau.

Cho tìm kiếm (i, j, x) là thủ tục tìm số x trong dãy $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$. Dữ liệu đầu vào là bộ ba $(1, n, x)$. Thủ tục sẽ dừng khi số hạng đầu tiên của dãy còn lại là x hoặc là khi dãy còn lại chỉ có một phần tử khác x . Nếu x không là số hạng đầu tiên và còn có các số hạng khác thì lại áp dụng thủ tục này, nhưng dãy tìm kiếm ít hơn một phần tử nhận được bằng cách xóa đi phần tử đầu tiên của dãy tìm kiếm ở bước vừa qua.

Ví dụ 3.14. Hãy xây dựng phiên bản đệ quy của thuật toán tìm kiếm nhị phân.

Giả sử ta muốn định vị x trong dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ bằng tìm kiếm nhị phân. Trước tiên ta so sánh x với số hạng giữa $a_{\left\lfloor \frac{(n+1)}{2} \right\rfloor}$. Nếu chúng bằng nhau thì thuật

toán kết thúc, nếu không ta chuyển sang tìm kiếm trong dãy ngắn hơn, nửa đầu của

dãy nếu x nhỏ hơn giá trị giữa của dãy xuất phát, nửa sau nếu ngược lại. Như vậy ta rút gọn việc giải bài toán tìm kiếm về việc giải cũng bài toán đó nhưng trong dãy tìm kiếm có độ dài lần lượt giảm đi một nửa.

3.1.4.2. *Đệ quy và lặp*

Thủ tục đệ quy sau đây cho ta giá trị của $n!$ với n là số nguyên dương

Có cách khác tính hàm giai thừa của một số nguyên từ định nghĩa đệ quy của nó. Thay cho việc lần lượt rút gọn việc tính toán cho các giá trị nhỏ hơn, ta có thể xuất phát từ giá trị của hàm tại 1 và lần lượt áp dụng định nghĩa đệ quy để tìm giá trị của hàm tại các số nguyên lớn dần. Đó là thủ tục lặp.

Thông thường để tính một dãy các giá trị được định nghĩa bằng đệ quy, nếu dùng phương pháp lặp thì số các phép tính sẽ ít hơn là dùng thuật toán đệ quy (trừ khi dùng các máy đệ quy chuyên dụng). Ta sẽ xem xét bài toán tính số hạng thứ n của dãy Fibonacci.

Theo thuật toán này, để tìm f_n ta biểu diễn $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Sau đó thay thế cả hai số này bằng tổng của hai số Fibonacci bậc thấp hơn, cứ tiếp tục như vậy cho tới khi f_0 và f_1 xuất hiện thì được thay bằng các giá trị của chúng theo định nghĩa. Do đó để tính f_n cần $f_{n-1} - 1$ phép cộng.

Bây giờ ta sẽ tính các phép toán cần dùng để tính f_n khi sử dụng phương pháp lặp. Thủ tục này khởi tạo x là $f_0 = 0$ và y là $f_1 = 1$. Khi vòng lặp được duyệt qua tổng của x và y được gán cho biến phụ z . Sau đó x được gán giá trị của y và y được gán giá trị của z . Vậy sau khi đi qua vòng lặp lần 1, ta có $x = f_1$ và $y = f_0 + f_1 = f_2$. Khi qua vòng lặp lần $n - 1$ thì $x = f_{n-1}$. Như vậy chỉ có $n - 1$ phép cộng được dùng để tìm f_n khi $n > 1$.

Ta đã chỉ ra rằng số các phép toán dùng trong thuật toán đệ quy nhiều hơn khi dùng phương pháp lặp. Tuy nhiên đôi khi người ta vẫn thích dùng thủ tục đệ quy hơn ngay cả khi nó tỏ ra kém hiệu quả so với thủ tục lặp. Đặc biệt, có những bài toán chỉ có thể giải bằng thủ tục đệ quy mà không thể giải bằng thủ tục lặp.

3.2. Lý thuyết đồ thị

Lý thuyết đồ thị là một ngành khoa học được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại. Những ý tưởng cơ bản của nó được đưa ra từ thế kỷ 18 bởi

nhà toán học Thụy Sĩ tên là Leonhard Euler. Ông đã dùng đồ thị để giải quyết bài toán 7 chiếc cầu Königsberg nổi tiếng.

Đồ thị cũng được dùng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Thí dụ, dùng đồ thị để xác định xem có thực hiện một mạch điện trên một bảng điện phẳng được không. Chúng ta cũng có thể phân biệt hai hợp chất hóa học có cùng công thức phân tử nhưng có cấu trúc khác nhau nhờ đồ thị. Chúng ta cũng có thể xác định xem hai máy tính có được nối với nhau bằng một đường truyền thông hay không nếu dùng mô hình đồ thị mạng máy tính. Đồ thị với các trọng số được gán cho các cạnh của nó có thể dùng để giải các bài toán như bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố trong một mạng giao thông. Chúng ta cũng có thể dùng đồ thị để lập lịch thi và phân chia kênh cho các đài truyền hình.

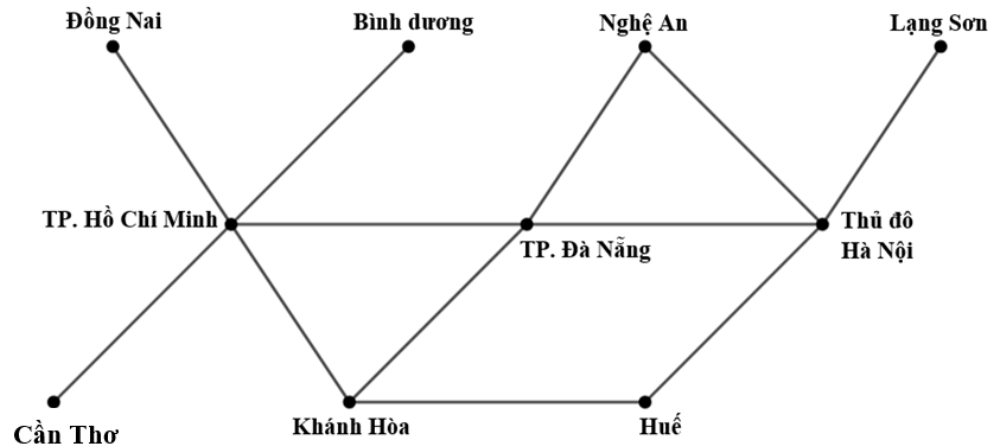
3.2.1. Các khái niệm cơ bản

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh (vô hướng hoặc có hướng) nối các đỉnh đó. Người ta phân loại đồ thị tùy theo đặc tính và số các cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị. Nhiều bài toán thuộc những lĩnh vực rất khác nhau có thể giải được bằng mô hình đồ thị. Chẳng hạn người ta có thể dùng đồ thị để biểu diễn ai có ảnh hưởng lên ai trong một tổ chức nào đó, và cũng có thể dùng đồ thị để biểu diễn các kết cục của cuộc thi đấu thể thao. Chúng ta cũng có thể dùng đồ thị để giải các bài toán như bài toán tính số các tổ hợp khác nhau của các chuyến bay giữa hai thành phố trong một mạng hàng không, hay để giải bài toán đi tham quan tất cả các đường phố của một thành phố sao cho mỗi đường phố đi qua đúng một lần, hoặc bài toán tìm số các màu cần thiết để tô các vùng khác nhau của một bản đồ,...

Trong đời sống, chúng ta thường gặp những sơ đồ, như sơ đồ tổ chức bộ máy, sơ đồ giao thông, sơ đồ hướng dẫn thứ tự đọc các chương trong một cuốn sách, ..., gồm những điểm biểu thị các đối tượng được xem xét (người, tổ chức, địa danh, chương mục sách, ...) và nối một số điểm với nhau bằng những đoạn thẳng (hoặc cong) hay những mũi tên, tượng trưng cho một quan hệ nào đó giữa các đối tượng. Đó là những ví dụ về đồ thị.

Lý thuyết đồ thị là lĩnh vực có nhiều ứng dụng hiện đại, được sử dụng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau như sử dụng để xác định các mạch vòng trong vấn đề giải tích mạch điện. Chúng ta có thể xác định hai máy tính trong mạng trao đổi

thông tin được với nhau hay không nhờ mô hình đồ thị của mạng máy tính và có thể biểu diễn các vị trí đặt máy tính bởi các điểm và các kênh thoại nối chúng bởi các đoạn nối (xem Hình 3.3).

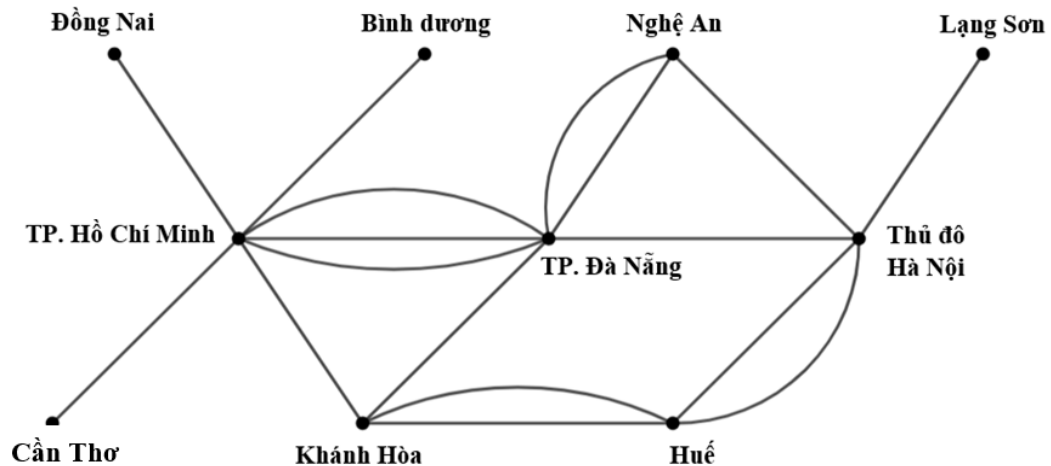


Hình 3.3. Sơ đồ mạng máy tính

Nhận thấy rằng trong mạng ở Hình 3.3, giữa hai máy bất kỳ chỉ có nhiều nhất là một kênh thoại nối chúng, kênh thoại này cho phép liên lạc cả hai chiều và không có máy tính nào lại được nối với chính nó. Sơ đồ mạng máy cho trong hình 1 được gọi là *đơn đồ thị vô hướng*. Ta đi đến định nghĩa sau

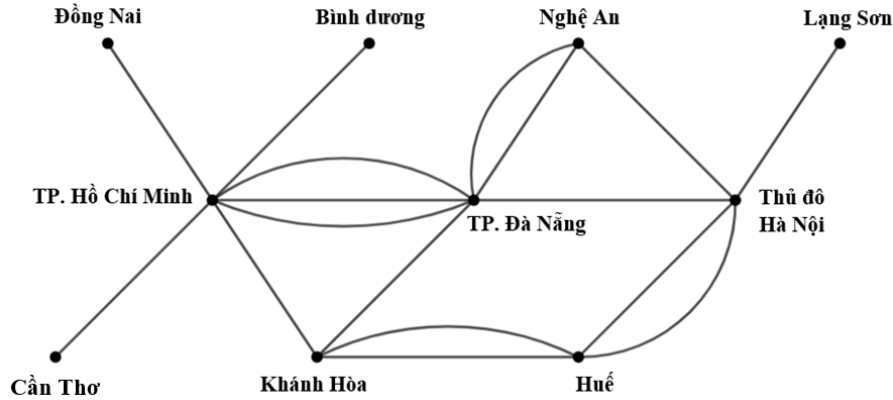
Định nghĩa 3.2. Đơn đồ thị G (Graph) vô hướng $G = (V, E)$ bao gồm V (vertex) là tập các đỉnh, và E (edge) là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.

Trong trường hợp giữa hai máy tính nào đó thường xuyên phải truyền tải nhiều thông tin người ta phải nối hai máy này bởi nhiều kênh thoại. Mạng với đa kênh thoại giữa các máy (xem Hình 3.4).



Hình 3.4. Sơ đồ mạng máy tính với đa kênh thoại

Định nghĩa 3.3. Đa đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh. Hai cạnh e_1 và e_2 được gọi là cạnh lặp nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.

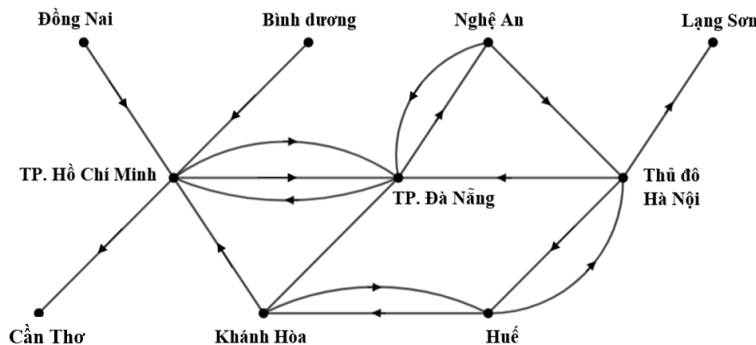


Hình 3.5. Sơ đồ mạng máy tính với kênh thoại thông báo

Rõ ràng mỗi đơn đồ thị đều là đa đồ thị, nhưng không phải đa đồ thị nào cũng là đơn đồ thị (vì trong đa đồ thị có thể có hai hoặc nhiều hơn hai cạnh nối một cặp đỉnh nào đó).

Trong mạng máy tính có thể có những kênh thoại nối một máy nào đó với chính nó (chẳng hạn với mục đích thông báo). Mạng như vậy được cho trong Hình 3.5. Khi đó đa đồ thị không thể mô tả được mạng. Như vậy, bởi vì có những *khuyên* (cạnh nối một đỉnh với chính nó). Trong trường hợp này chúng ta cần sử dụng đến khái niệm *giả đồ thị vô hướng*, được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3.4. Giả đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (không nhất thiết phải khác nhau) của V gọi là cạnh. Cạnh e được gọi là khuyên nếu nó có dạng $e = (u, u)$.



Hình 3.6. Mạng máy tính với kênh thoại một chiều

Các kênh thoại trong mạng máy tính có thể chỉ cho phép truyền tin theo một chiều. Chẳng hạn, trong Hình 3.6 máy chủ ở Hà Nội chỉ có thể nhận tin từ các máy ở các địa phương, có một số máy chỉ có thể gửi tin đi, còn các kênh thoại cho phép truyền tin theo cả hai chiều được thay thế bởi hai cạnh có hướng ngược chiều nhau.

Định nghĩa 3.5. Đơn đồ thị có hướng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung.

Nếu trong mạng có thể có đa kênh thoại một chiều, ta sẽ phải sử dụng đến khái niệm đa đồ thị có hướng

3.2.2. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa 3.6. Đa đồ thị có hướng $G = (V, E)$ bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung. Hai cung e_1 và e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.

Trong các phần tiếp theo chủ yếu chúng ta sẽ làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng. Vì vậy, để cho ngắn gọn, ta sẽ bỏ qua tính từ đơn khi nhắc đến chúng.

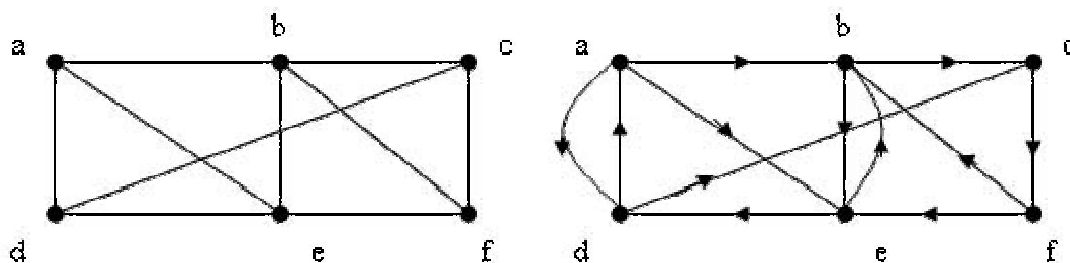
Định nghĩa 3.7. Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v , trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là dãy $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, trong đó $u = x_0, v = x_n, (x_i, x_{i+1}) \in E, i = 0, 1, \dots, n-1$.

Đường đi nói trên còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cạnh:

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n).$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là $u = v$) được gọi là chu trình. Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào bị lặp lại.

Ví dụ 3.15. Trên đồ thị vô hướng cho trong Hình 3.5: a, d, e, f, e là đường đi đơn độ dài. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (c, e) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 5. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó 2 lần.



Hình 3.7. Đường đi trên đồ thị

Khái niệm đường đi và chu trình trên đồ thị có hướng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp đồ thị vô hướng, chỉ khác là ta có chú ý đến hướng trên các cung.

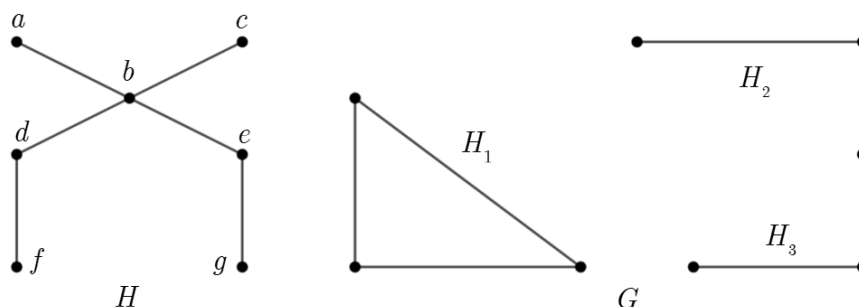
Ví dụ 3.16. Trên đồ thị có hướng cho trong Hình 3.6: a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (c, e) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó 2 lần.

Xét một mạng máy tính. Một câu hỏi đặt ra là hai máy tính bất kỳ trong mạng này có thể trao đổi thông tin được với nhau hoặc là trực tiếp qua kênh nối chúng hoặc thông qua một hoặc vài máy tính trung gian trong mạng? Nếu sử dụng đồ thị để biểu diễn mạng máy tính này (trong đó các đỉnh của đồ thị tương ứng với các máy tính, còn các cạnh tương ứng với các kênh nối) câu hỏi đó được phát biểu trong ngôn ngữ đồ thị như sau: Tồn tại hay không đường đi giữa mọi cặp đỉnh của đồ thị.

Định nghĩa 3.8. Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

Như vậy hai máy tính bất kỳ trong mạng có thể trao đổi thông tin được với nhau khi và chỉ khi đồ thị tương ứng với mạng này là đồ thị liên thông.

Ví dụ 3.17. Trong Hình 3.6. Đồ thị G là liên thông, còn đồ thị H là không liên thông.



Hình 3.8. Đồ thị G và H

Định nghĩa 3.9. Ta gọi đồ thị con của đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị $G_H = (W, F)$, trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$. Trong trường hợp đồ thị là không liên thông, nó sẽ rã ra thành một số đồ thị con liên thông đôi một không có đỉnh chung. Những đồ thị con liên thông như vậy ta sẽ gọi là các thành phần liên thông của đồ thị.

Ví dụ 3.18. Đồ thị H trong hình 2 gồm 3 thành phần liên thông H_1, H_2, H_3 .

Trong mạng máy tính có thể có những máy (Những kênh nối) mà sự hỏng hóc của nó sẽ ảnh hưởng đến việc trao đổi thông tin trong mạng. Các khái niệm tương ứng với tình huống này được đưa ra trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.10. Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh nếu việc loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.

Ví dụ 3.19. Trong đồ thị G ở hình, đỉnh d và e là đỉnh rẽ nhánh, còn các cạnh (d, g) và (e, f) là cầu.

Đối với đồ thị có hướng có hai khái niệm liên thông phụ thuộc vào việc ta có xét đến hướng trên các cung hay không.

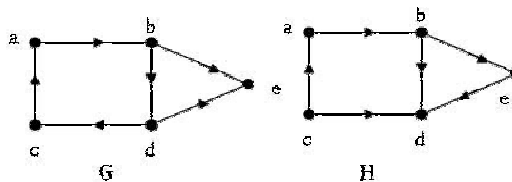
Định nghĩa 3.11.

(i) Đồ thị có hướng $G = (V, A)$ được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

(ii) Đồ thị có hướng $G = (V, A)$ được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là vô hướng liên thông.

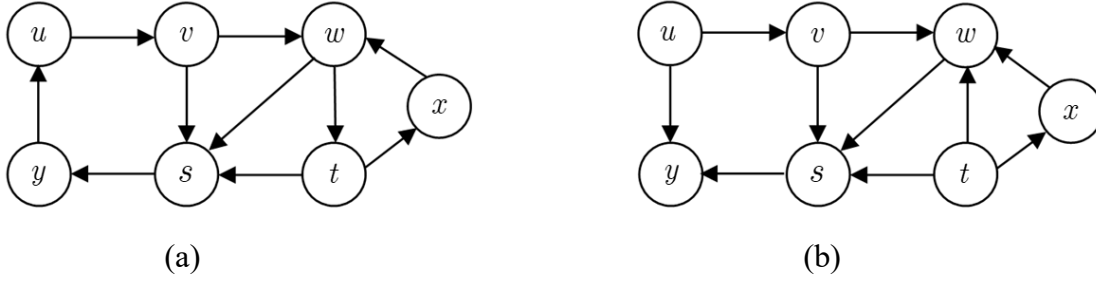
Nhận xét: Rõ ràng nếu đồ thị là liên thông mạnh thì nó cũng là liên thông yếu, nhưng điều ngược lại là không luôn đúng, như chỉ ra trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 3.20. Trong hình 3.9 đồ thị G là liên thông mạnh, còn H là liên thông yếu nhưng không là liên thông mạnh.



Hình 3.9. Đồ thị liên thông mạnh G và đồ thị liên thông yếu H

Ví dụ 3.21. Đồ thị Hình 3.10a là liên thông mạnh nhưng đồ thị Hình 3.10b là liên thông yếu (không có đường đi từ u tới x cũng như từ x tới u).



Hình 3.10. Đồ thị liên thông mạnh và đồ thị liên thông yếu

Một câu hỏi đặt ra là khi nào có thể định hướng các cạnh của một đồ thị vô hướng liên thông để có thể thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh? Ta sẽ gọi đồ thị như vậy là đồ thị định hướng được. Định lý dưới đây cho ta tiêu chuẩn nhận biết một đồ thị có là định hướng được hay không.

3.2.3. Đồ thị vô hướng liên thông

Định lý 3.1. Đồ thị vô hướng liên thông là định hướng được khi và chỉ khi mỗi cạnh của nó nằm trên ít nhất một chu trình.

Chứng minh: Điều kiện cần. Giả sử e là một cạnh của một đồ thị. Từ sự tồn tại đường đi có hướng từ u đến v và ngược lại suy ra (u, v) phải nằm trên ít nhất một chu trình.

Điều kiện đủ. Thủ tục sau đây cho phép định hướng các cạnh của đồ thị để thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh. Giả sử C là một chu trình nào đó trong đồ thị. Định hướng các cạnh trên chu trình này theo một hướng đi vòng theo nó. Nếu tất cả các cạnh của đồ thị là đã được định hướng thì kết thúc thủ tục. Ngược lại, chọn e là một cạnh chưa định hướng có chung đỉnh với ít nhất một trong số các cạnh đã định hướng. Theo giả thiết tìm được chu trình C' chứa cạnh e . Định hướng các cạnh chưa được định hướng của C' theo một hướng dọc theo chu trình này (không định hướng lại các cạnh đã có định hướng). Thủ tục trên sẽ được lặp lại cho đến khi tất cả các cạnh của đồ thị được định hướng. Khi đó ta thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh.

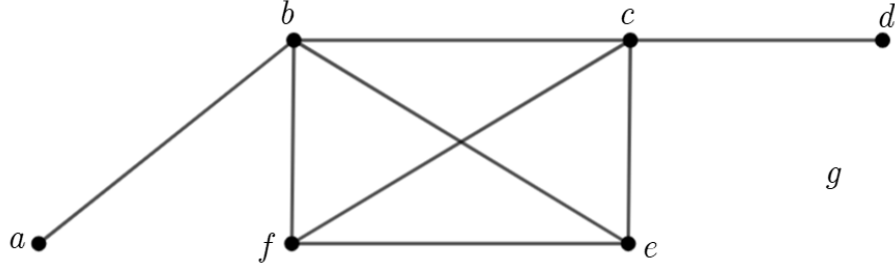
Định nghĩa 3.12.

Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng G được gọi là kề nhau nếu (u, v) là cạnh của đồ thị G . Nếu $e = (u, v)$ là cạnh của đồ thị ta nói cạnh này là liên thuộc với hai

đỉnh u và v , hoặc cũng nói là nối đỉnh u và đỉnh v , đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là các đỉnh đầu của cạnh (u, v) .

Định nghĩa 3.13.

Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và sẽ ký hiệu là $\deg(v)$.



Hình 3.10. Đồ thị vô hướng

Ví dụ 3.22. Xét đồ thị cho trong hình 3.10, ta có

$$\deg(a) = 1, \quad \deg(b) = 4, \quad \deg(c) = 4, \quad \deg(f) = 3, \quad \deg(d) = 1, \quad \deg(e) = 3, \\ \deg(g) = 0.$$

Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 được gọi là *đỉnh treo*. Trong ví dụ trên đỉnh g là đỉnh cô lập, a và d là các đỉnh treo. Bậc của đỉnh có tính chất sau:

Định lý 3.2. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng với m cạnh. Khi đó tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

Chứng minh: Rõ ràng mỗi cạnh $e = (u, v)$ được tính một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$. Từ đó suy ra tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

Ví dụ 3.23. Đồ thị với n đỉnh có bậc là 6 có bao nhiêu cạnh?

Theo định lý 2 ta có $2m = 6n$. Từ đó suy ra tổng các cạnh của đồ thị là $3n$.

Hệ quả 3.1. Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ (nghĩa là có bậc là số lẻ) là một số chẵn.

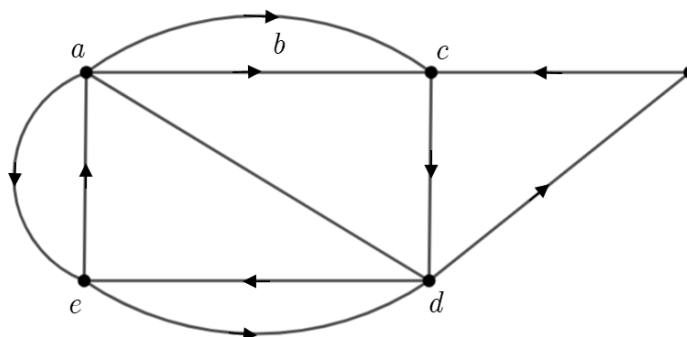
3.2.4. Đồ thị có hướng liên thông

Định nghĩa 3.14. $e = (u, v)$ là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v hoặc cũng nói cung này là đi ra khỏi đỉnh u và vào đỉnh v . Đỉnh $u(v)$ sẽ được gọi là đỉnh đầu (cuối) của cung (u, v) .

Tương tự như khái niệm bậc, đối với đồ thị có hướng ta có khái niệm bán bậc ra và bán bậc vào của một đỉnh.

Định nghĩa 3.15.

Ta gọi bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh V trong đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu là $\deg^+(v)$ ($\deg^-(v)$).



Hình 3.11. Đồ thị có hướng

Ví dụ 3.24. Xét đồ thị cho trong hình 3.11.

Ta có

$$\deg^-(a) = 1, \deg^-(b) = 2, \deg^-(c) = 2, \deg^-(d) = 2, \deg^-(e) = 2.$$

$$\deg^+(a) = 3, \deg^+(b) = 1, \deg^+(c) = 1, \deg^+(d) = 2, \deg^+(e) = 2.$$

Do mỗi cung (u, v) sẽ được tính một lần trong bán bậc vào của đỉnh v và một lần trong bán bậc ra của đỉnh u nên ta có:

Rất nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng trên các cung của nó. Vì vậy, trong nhiều trường hợp sẽ thuận tiện hơn nếu ta bỏ qua hướng trên các cung của đồ thị. Đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng trên các cung được gọi là *đồ thị vô hướng tương ứng* với đồ thị có hướng đã cho.

Định nghĩa: Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông mạnh nếu với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v của G đều có đường đi từ u tới v và đường đi từ v tới u .

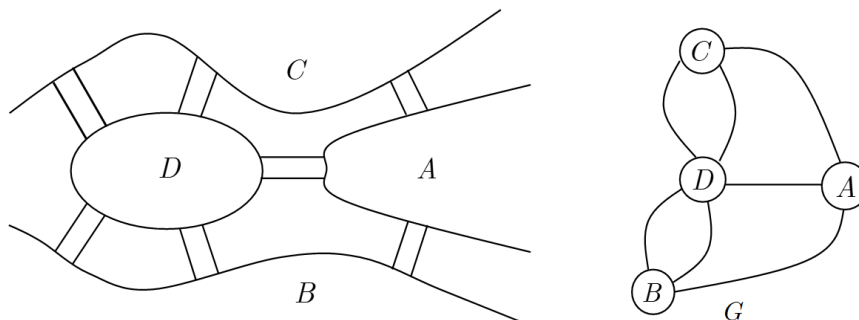
Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng nền của nó là liên thông.

Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông một chiều nếu với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v của G đều có đường đi từ u tới v hoặc đường đi từ v tới u .

3.2.5. Đồ thị Euler và đồ thị Hamilton

3.2.5.1. Đường đi Euler và đồ thị Euler

Có thể coi năm 1736 là năm khai sinh lý thuyết đồ thị, với việc công bố lời giải “bài toán về bảy cây cầu ở Königsberg” của nhà toán học lỗi lạc Euler (1707-1783). Thành phố Königsberg thuộc Phổ (nay gọi là Kaliningrad thuộc Nga) được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel, các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ 18, người ta xây bảy chiếc cầu nối các vùng này với nhau.



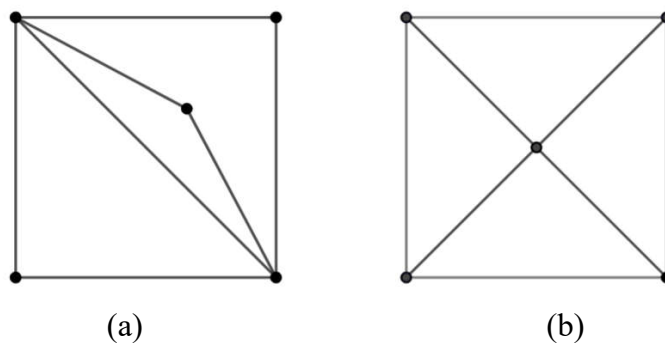
Hình 3.12. Minh họa bảy cây cầu ở Königsberg

Dân thành phố từng thắc mắc: “Có thể nào đi dạo qua tất cả bảy cầu, mỗi cầu chỉ một lần thôi không?”. Nếu ta coi mỗi khu vực A , B , C , D như một đỉnh và mỗi cầu qua lại hai khu vực là một cạnh nối hai đỉnh thì ta có sơ đồ của Königsberg là một đa đồ thị G như hình trên.

Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu, mỗi cầu chỉ qua một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình như sau: Có tồn tại chu trình đơn trong đa đồ thị G chứa tất cả các cạnh?

Định nghĩa 3.16. Chu trình (đường đi) đơn chứa tất cả các cạnh (hoặc cung) của đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) G được gọi là chu trình Euler. Một đồ thị liên thông có chứa một chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler.

Ví dụ 3.25. Đồ thị trong Hình 3.13a là Euler, đồ thị trong Hình 3.13b không Euler



Hình 3.13. Minh họa đồ thị Euler và không Euler

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là đồ thị Euler được Euler tìm ra vào năm 1736 khi ông giải quyết bài toán “học búa” nổi tiếng thời đó về bảy cây cầu ở Königsberg và đây là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị.

Định lý 3.3. Đồ thị (vô hướng) liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

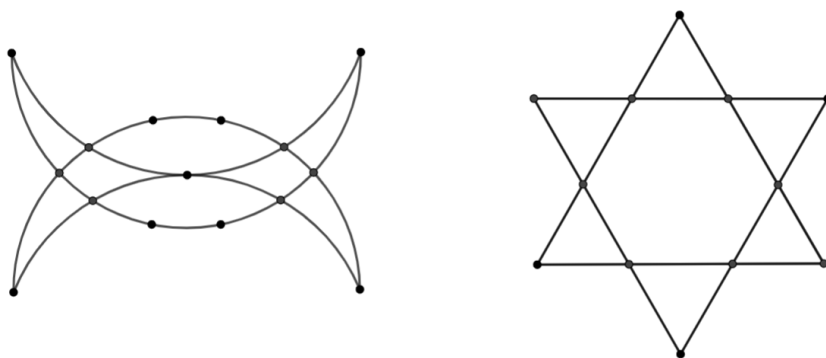
Hệ quả 3.2. Đồ thị liên thông G là nửa Euler (mà không là Euler) khi và chỉ khi có đúng hai đỉnh bậc lẻ trong G .

Chứng minh: Nếu G là nửa Euler thì tồn tại một đường đi Euler trong G từ đỉnh u đến đỉnh v . Gọi G' là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm vào cạnh (u, v) . Khi đó G' là đồ thị Euler nên mọi đỉnh trong G' đều có bậc chẵn (kể cả u và v). Vì vậy u và v là hai đỉnh duy nhất trong G có bậc lẻ.

Đảo lại, nếu có đúng hai đỉnh bậc lẻ là u và v thì gọi G' là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm vào cạnh (u, v) . Khi đó mọi đỉnh của G' đều có bậc chẵn hay G' là đồ thị Euler. Bỏ cạnh (u, v) đã thêm vào ra khỏi chu trình Euler trong G' ta có được đường đi Euler từ u đến v trong G hay G là nửa Euler.

Trong thực tế, chúng ta hay gặp một số bài toán đồ với câu hỏi là xét xem một đồ thị có thể vẽ bằng một nét hay không (vẽ một nét là vẽ một đường liên tục, không nhấc bút lên mà cũng không vẽ lại đường cũ).

Ví dụ 3.26. Những thanh gươm của Mohammed và ngôi sao David là ví dụ về đồ thị Euler, tức là vẽ được bằng một nét.



Hình 3.14. Những thanh gươm của Mohammed và ngôi sao David

Chú ý 3.5. Ta có thể tìm được một chu trình Euler bắt đầu từ một đỉnh bất kì trong đồ thị liên thông G có bậc của mọi đỉnh là chẵn theo *thuật toán Fleury* sau đây.

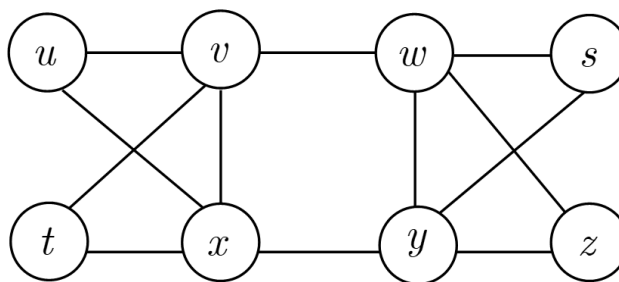
Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của G và tuân theo hai quy tắc sau:

Quy tắc 1. Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì xóa nó đi; sau đó xóa đỉnh cô lập (nếu có);

Quy tắc 2. Không bao giờ đi qua một cây cầu, trừ khi không còn cách lựa chọn đi nào khác.

Ví dụ 3.27.

Xét đường đi trên hình 3.15



Hình 3.15. Đường đi minh họa thuật toán Fleury

Giải thích đường đi ở hình 3.15 như sau: Xuất phát từ u , ta có thể đi theo cạnh (u,v) hoặc (u,x) , giả sử là (u,v) (xóa (u,v)). Từ v có thể đi qua một trong các cạnh (v,w) , (v,x) , (v,t) , giả sử (v,w) (xóa (v,w)). Tiếp tục, có thể đi theo một trong các cạnh (w,s) , (w,y) , (w,z) , giả sử (w,s) (xóa (w,s)). Đi theo cạnh (s,y) (xóa (s,y) và s). Vì (y,x) là cầu nên có thể đi theo một trong hai cạnh (y,w) , (y,z) , giả sử (y,w) (xóa (y,w)). Đi theo (w,z) (xóa (w,z) và w) và theo (z,y) (xóa (z,y) và z). Tiếp tục đi theo cạnh (y,x) (xóa (y,x) và y). Vì (x,u) là cầu nên đi theo cạnh (x,v) hoặc (x,t) , giả sử (x,v) (xóa (x,v)). Tiếp tục đi theo cạnh (v,t) (xóa (v,t) và v), theo cạnh (t,x) (xóa cạnh (t,x) và t), cuối cùng đi theo cạnh (x,u) (xóa (x,u) , x và u).

Ví dụ 3.28.

Một nhân viên đi từ Bưu Điện, qua một số đường phố để phát thư, rồi quay về Bưu Điện. Người ấy phải đi qua các đường theo trình tự nào để đường đi là ngắn nhất?

Bài toán trên được nhà toán học Trung Hoa Guan nêu lên đầu tiên (1960), vì vậy thường được gọi là “bài toán người phát thư Trung Hoa”. Ta xét bài toán ở một dạng đơn giản như sau:

Cho đồ thị liên thông G . Một chu trình qua mọi cạnh của G gọi là một hành trình trong G . Trong các hành trình đó, hãy tìm hành trình ngắn nhất, tức là qua ít cạnh nhất.

Rõ ràng rằng nếu G là đồ thị Euler (mọi đỉnh đều có bậc chẵn) thì chu trình Euler trong G (qua mỗi cạnh của G đúng một lần) là hành trình ngắn nhất cần tìm.

Chỉ còn phải xét trường hợp G có một số đỉnh bậc lẻ (số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn). Khi đó, mọi hành trình trong G phải đi qua ít nhất hai lần một số cạnh nào đó.

Dễ thấy rằng một hành trình qua một cạnh (u, v) nào đó quá hai lần thì không phải là hành trình ngắn nhất trong G . Vì vậy, ta chỉ cần xét những hành trình T đi qua hai lần một số cạnh nào đó của G .

Ta quy ước xem mỗi hành trình T trong G là một hành trình trong đồ thị Euler G_T , có được từ G bằng cách vẽ thêm một cạnh song song đối với những cạnh mà T đi qua hai lần. Bài toán đặt ra được đưa về bài toán sau:

Trong các đồ thị Euler G_T , tìm đồ thị có số cạnh ít nhất (khi đó chu trình Euler trong đồ thị này là hành trình ngắn nhất).

Định lý 3.4. (Goodman và Hedetniemi, 1973) Nếu G là một đồ thị liên thông có q cạnh thì hành trình ngắn nhất trong G có chiều dài

$$q + m(G),$$

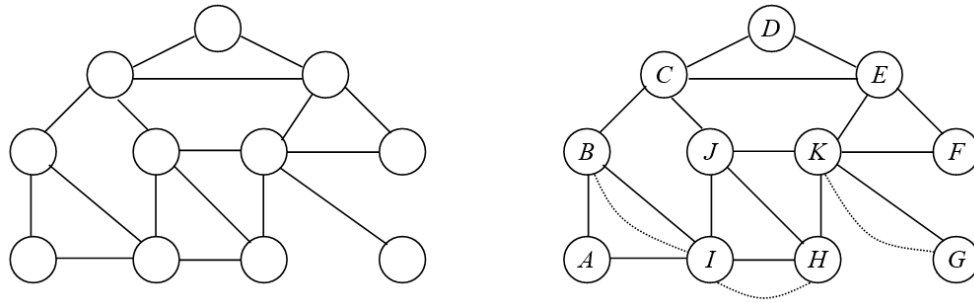
trong đó $m(G)$ là số cạnh mà hành trình đi qua hai lần và được xác định như sau:

Gọi $V_0(G)$ là tập hợp các đỉnh bậc lẻ ($2k$ đỉnh) của G . Ta phân $2k$ phần tử của G thành k cặp, mỗi tập hợp k cặp gọi là một phân hoạch cặp của $V_0(G)$.

Ta gọi độ dài đường đi ngắn nhất từ u đến v là khoảng cách $d(u, v)$. Đối với mọi phân hoạch cặp P_i , ta tính khoảng cách giữa hai đỉnh trong từng cặp, rồi tính tổng $d(P_i)$. Số $m(G)$ bằng cực tiểu của các $d(P_i)$:

$$m(G) = d(P_i).$$

Từ định lý trên, ta có thể giải bài toán người phát thư Trung Hoa cho trong đồ thị sau:



Hình 3.16. Biểu diễn đường đi bài toán người phát thư Trung Hoa

Tập hợp các đỉnh bậc lẻ $V_0(G) = \{B, G, H, K\}$ và tập hợp các phân hoạch cặp là $P = \{P_1, P_2, P_3\}$, trong đó

$$P_1 = \{(B, G), (H, K)\} \rightarrow d(P_1) = d(B, G) + d(H, K) = 4 + 1 = 5,$$

$$P_2 = \{(B, H), (G, K)\} \rightarrow d(P_2) = d(B, H) + d(G, K) = 2 + 1 = 3,$$

$$P_3 = \{(B, K), (G, H)\} \rightarrow d(P_3) = d(B, K) + d(G, H) = 3 + 2 = 5.$$

$$m(G) = \min(d(P_1), d(P_2), d(P_3)) = 3.$$

Do đó G_T có được từ G bằng cách thêm vào 3 cạnh:

$(B, I), (I, H), (G, K)$ và G_T là đồ thị Euler.

Vậy hành trình ngắn nhất cần tìm là đi theo chu trình Euler trong G_T :

$A, B, C, D, E, F, K, G, K, E, C, J, K, H, J, I, H, I, B, I, A.$

3.2.5.2. Đường đi Hamilton và đồ thị Hamilton

Năm 1857, nhà toán học người Ailen là Hamilton(1805-1865) đưa ra trò chơi “đi vòng quanh thế giới” như sau.

Cho một hình thập nhị diện đều (đa diện đều có 12 mặt, 20 đỉnh và 30 cạnh), mỗi đỉnh của hình mang tên một thành phố nổi tiếng, mỗi cạnh của hình (nối hai đỉnh) là đường đi lại giữa hai thành phố tương ứng. Xuất phát từ một thành phố, hãy tìm đường đi thăm tất cả các thành phố khác, mỗi thành phố chỉ một lần, rồi trở về chỗ cũ.

Trước Hamilton, có thể là từ thời Euler, người ta đã biết đến một câu đố hóc búa về “đường đi của con mã trên bàn cờ”. Trên bàn cờ, con mã chỉ có thể đi theo đường chéo của hình chữ nhật 2×3 hoặc 3×2 ô vuông. Giả sử bàn cờ có 8×8 ô vuông. Hãy tìm đường đi của con mã qua được tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô chỉ một lần rồi trở lại ô xuất phát.

Bài toán này được nhiều nhà toán học chú ý, đặc biệt là Euler, De Moivre, Vandermonde, ...

Hiện nay đã có nhiều lời giải và phương pháp giải, trong đó có quy tắc: mỗi lần bố trí con mã ta chọn vị trí mà tại vị trí này số ô chưa dùng tới do nó không chế là ít nhất.

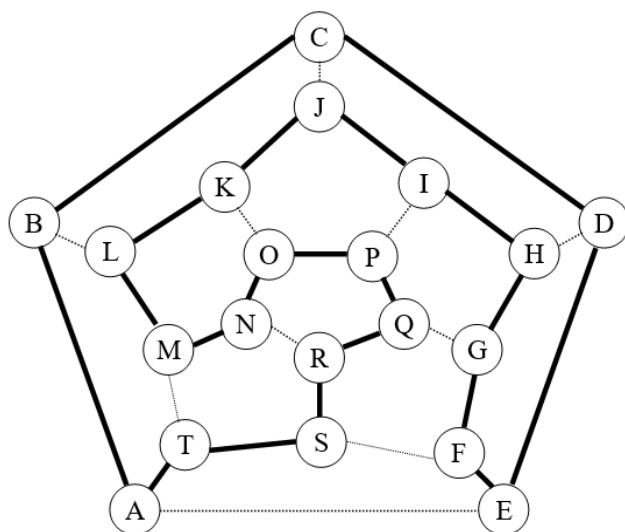
Một phương pháp khác dựa trên tính đối xứng của hai nửa bàn cờ. Ta tìm hành trình của con mã trên một nửa bàn cờ, rồi lấy đối xứng cho nửa bàn cờ còn lại, sau đó nối hành trình của hai nửa đã tìm lại với nhau.

Trò chơi và câu đố trên dẫn tới việc khảo sát một lớp đồ thị đặc biệt, đó là đồ thị Hamilton.

Định nghĩa 3.17. Chu trình (đường đi) sơ cấp chứa tất cả các đỉnh của đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) G được gọi là chu trình Hamilton. Một đồ thị có chứa một chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton.

Ví dụ 3.29.

Đồ thị Hamilton (hình thập nhị diện đều biểu diễn trong mặt phẳng) với chu trình Hamilton $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, A$ (đường tô đậm, Hình 3.8).



Hình 3.17. Đồ thị Hamilton hình thập nhị diện đều biểu diễn trong mặt phẳng

Như vậy, chu trình Hamilton là chu trình sơ cấp dài nhất trong G . Từ định nghĩa, ta suy ra các quy tắc sau đây để xây dựng 1 chu trình Hamilton H hoặc chỉ ra rằng đồ thị không vô hướng G không là đồ thị Hamilton.

- *Quy tắc 1.* Tất cả các cạnh kề với 1 đỉnh bậc hai phải ở trong H .

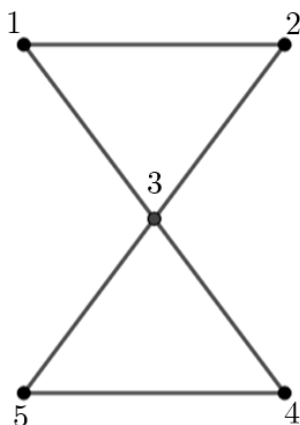
- *Quy tắc 2.* Không có chu trình con (chu trình có chiều dài nhỏ hơn n) nào được tạo thành trong quá trình xây dựng H .

- *Quy tắc 3.* Khi chu trình Hamilton mà ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xóa tất cả cạnh kề với i mà chưa dùng (không còn dùng đến nữa). Điều này có thể cho ta một số đỉnh bậc 2 và ta lại có thể dùng Quy tắc 1.

- *Quy tắc 4.* Không đỉnh cô lập hay cạnh treo nào được tạo nên sau khi áp dụng Quy tắc 3.

Ví dụ 3.30.

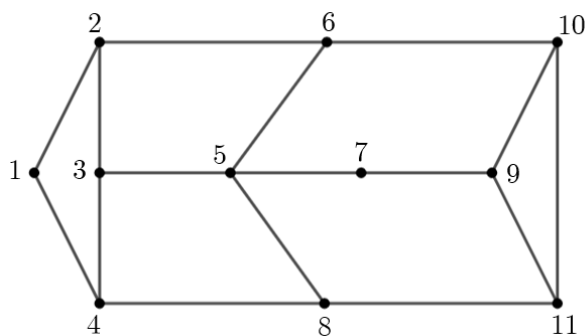
Xét đồ thị trong *Hình 3.18*. Theo *Quy tắc 1* thì các cạnh $1\&2$, $1\&3$, $2\&3$, $4\&3$, $2\&5$, $5\&3$ phải ở trong H và ta có chu trình con, trái với quy tắc 2. Vậy đồ thị không Hamilton.



Hình 3.18. Đồ thị không Hamilton

Ví dụ 3.31.

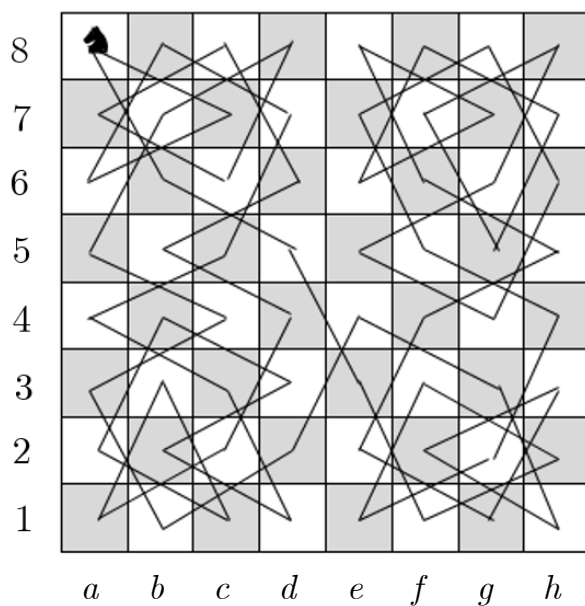
Xét đồ thị trong hình 3.19. Theo *Quy tắc 1*, các cạnh $1\&2$, $1\&4$, $7\&5$, $7\&9 \in H$. Vì lý do đối xứng nên tại đỉnh 9, ta có thể giả sử $9\&10 \in H$. Theo quy tắc 3 ta xóa cạnh $9\&11 \Rightarrow 11\&10$, $11\&8 \in H$. Tại đỉnh 10, cạnh $10\&6$ được xóa và do đó $6\&5$, $6\&2 \in H$. Lại áp dụng *Quy tắc 3*, ta xóa các cạnh $3\&2$, $3\&5$, $5\&8$ và do đó 3 đỉnh treo, trái với *Quy tắc 4*. Vậy đồ thị không Hamilton.



Hình 3.19. Đồ thị không Hamilton

Ví dụ 3.32.

Hành trình của con mã trên bàn cờ 8×8 . Có rất nhiều lời giải cho bài toán này trên bàn cờ vua tiêu chuẩn 8×8 , cụ thể là đến nay đã có khoảng 26.534.728.821.064 lời giải trong đó quân Mã có thể kết thúc tại chính ô mà nó khởi đầu. Một hành trình như vậy của quân Mã được gọi là một hành trình đóng, còn một hành trình mà quân Mã đi qua tất cả các ô, mỗi ô một lần nhưng không thể quay về ô ban đầu của nó chỉ bằng một nước đi được gọi là một hành trình mở. Hình 3.20 là một lời giải cho bàn cờ 8×8 .



Hình 3.20. Hành trình của con mã trên bàn cờ 8×8

Đường đi Hamilton tương tự đường đi Euler trong cách phát biểu: Đường đi Euler qua mọi cạnh (cung) của đồ thị đúng một lần, đường đi Hamilton qua mọi đỉnh của đồ thị đúng một lần. Tuy nhiên, nếu như bài toán tìm đường đi Euler trong một đồ thị đã được giải quyết trọn vẹn, dấu hiệu nhận biết một đồ thị Euler là khá đơn giản và

để sử dụng, thì các bài toán về tìm đường đi Hamilton và xác định đồ thị Hamilton lại khó hơn rất nhiều. Đường đi Hamilton và đồ thị Hamilton có nhiều ý nghĩa thực tiễn và đã được nghiên cứu nhiều, nhưng vẫn còn những khó khăn lớn chưa ai vượt qua được.

Người ta chỉ mới tìm được một vài điều kiện đủ để nhận biết một lớp rất nhỏ các đồ thị Hamilton và đồ thị nửa Hamilton. Sau đây là một vài kết quả.

Định lý 3.8. Nếu G là một đồ thị có hướng đầy đủ thì G là đồ thị nửa Hamilton.

Chứng minh:

Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng đầy đủ và α là đường đi sơ cấp bất kỳ trong đồ thị G .

- Nếu α đã đi qua tất cả các đỉnh của G thì nó là một đường đi Hamilton của G .
- Nếu trong G còn có đỉnh nằm ngoài α , thì ta có thể bổ sung dần các đỉnh này vào α và cuối cùng nhận được đường đi Hamilton.

Thật vậy, giả sử v là đỉnh tùy ý không nằm trên α .

a) Nếu có cung nối v với v_1 thì bổ sung v vào đầu của đường đi α để được $\alpha_1 = (v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k)$.

b) Nếu tồn tại chỉ số i ($1 \leq i \leq k-1$) mà từ v_i có cung nối tới v và từ v có cung nối tới v_{i+1} thì ta chen v vào giữa v_i và v_{i+1} để được đường đi sơ cấp $\alpha_2 = (v_1, v_2, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_k)$.

c) Nếu cả hai khả năng trên đều không xảy ra nghĩa là với mọi i ($1 \leq i \leq k-1$) v_i đều có cung đi tới v . Khi đó bổ sung v vào cuối của đường đi α và được đường đi $\alpha_3 = (v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v)$.

Nếu đồ thị G có n đỉnh thì sau $n-k$ bổ sung ta sẽ nhận được đường đi Hamilton.

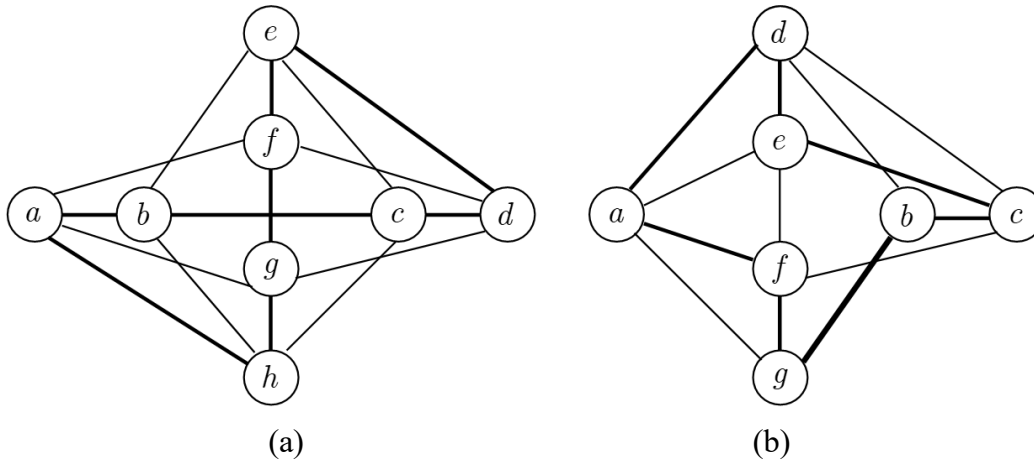
Định lý 3.9. Nếu G là đồ thị phân đôi với hai tập đỉnh là V_1, V_2 có số đỉnh cùng bằng n ($n \geq 2$) và bậc của mỗi đỉnh lớn hơn $\frac{n}{2}$ thì G là một đồ thị Hamilton.

Định lý 3.10. Nếu G là một đơn đồ thị có n đỉnh và bất kỳ hai đỉnh nào không kề nhau cũng có tổng số bậc không nhỏ hơn n thì G là một đồ thị Hamilton.

Ví dụ 3.33. Xét hai đồ thị (xem Hình 3.20)

Đồ thị ở Hình 3.20a có 8 đỉnh, đỉnh nào cũng có bậc 4, nên theo Định lý 3.9 đồ thị này là Hamilton.

Đồ thị ở Hình 3.20b có 5 đỉnh, đỉnh nào cũng có bậc 4 và 2 đỉnh bậc 2 kề nhau nên tổng số bậc không nhỏ hơn 7, do đó theo Định lý 3.10 đồ thị này là Hamilton.

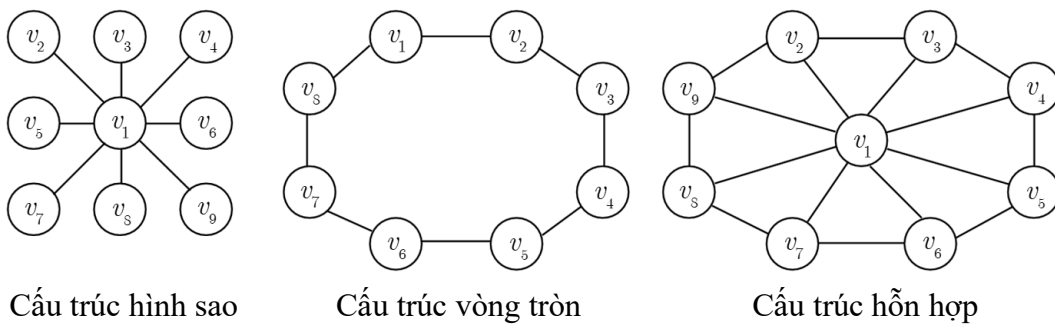


Hình 3.20. Đồ thị Hamilton

3.2.5.3. Một vài ứng dụng của các đồ thị đặc biệt

- *Ứng dụng vào các mạng cục bộ (LAN):* Một số mạng cục bộ dùng cấu trúc hình sao, trong đó tất cả các thiết bị được nối với thiết bị điều khiển trung tâm. Mạng cục bộ kiểu này có thể biểu diễn bằng một đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{1,n}$. Các thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác đều phải qua thiết bị điều khiển trung tâm.

Mạng cục bộ cũng có thể có cấu trúc vòng tròn, trong đó mỗi thiết bị nối với đúng hai thiết bị khác. Mạng cục bộ kiểu này có thể biểu diễn bằng một đồ thị vòng C_n . Thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác được truyền đi theo vòng tròn cho tới khi đến nơi nhận (xem Hình 3.34).



Hình 3.34. Một số mạng cục bộ theo các cấu trúc

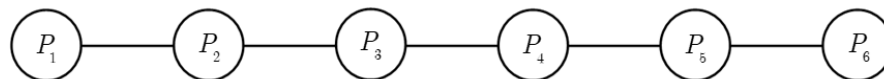
Cuối cùng, một số mạng cục bộ dùng cấu trúc hỗn hợp của hai cấu trúc trên. Các thông báo được truyền vòng quanh theo vòng tròn hoặc có thể qua thiết bị trung tâm. Sự dư thừa này có thể làm cho mạng đáng tin cậy hơn. Mạng cục bộ kiểu này có thể biểu diễn bằng một đồ thị bánh xe W_n .

- *Ứng dụng xử lý song song*: Các thuật toán để giải các bài toán được thiết kế để thực hiện một phép toán tại mỗi thời điểm là thuật toán nối tiếp. Tuy nhiên, nhiều bài toán với số lượng tính toán rất lớn như bài toán mô phỏng thời tiết, tạo hình trong y học hay phân tích mật mã không thể giải được trong một khoảng thời gian hợp lý nếu dùng thuật toán nối tiếp ngay cả khi dùng các siêu máy tính. Ngoài ra, do những giới hạn về mặt vật lý đối với tốc độ thực hiện các phép toán cơ sở, nên thường gặp các bài toán không thể giải trong khoảng thời gian hợp lý bằng các thao tác nối tiếp. Vì vậy, người ta phải nghĩ đến kiểu xử lý song song.

Khi xử lý song song, người ta dùng các máy tính có nhiều bộ xử lý riêng biệt, mỗi bộ xử lý có bộ nhớ riêng, nhờ đó có thể khắc phục được những hạn chế của các máy nối tiếp. Các thuật toán song song phân chia bài toán chính thành một số bài toán con sao cho có thể giải đồng thời được. Do vậy, bằng các thuật toán song song và nhờ việc sử dụng các máy tính có bộ đa xử lý, người ta hy vọng có thể giải nhanh các bài toán phức tạp. Trong thuật toán song song có một dãy các chỉ thị theo dõi việc thực hiện thuật toán, gửi các bài toán con tới các bộ xử lý khác nhau, chuyển các thông tin vào, thông tin ra tới các bộ xử lý thích hợp.

Khi dùng cách xử lý song song, mỗi bộ xử lý có thể cần các thông tin ra của các bộ xử lý khác. Do đó chúng cần phải được kết nối với nhau. Người ta có thể dùng loại đồ thị thích hợp để biểu diễn mạng kết nối các bộ xử lý trong một máy tính có nhiều bộ xử lý. Kiểu mạng kết nối dùng để thực hiện một thuật toán song song cụ thể phụ thuộc vào những yêu cầu với việc trao đổi dữ liệu giữa các bộ xử lý, phụ thuộc vào tốc độ mong muốn và tất nhiên vào phần cứng hiện có của máy tính.

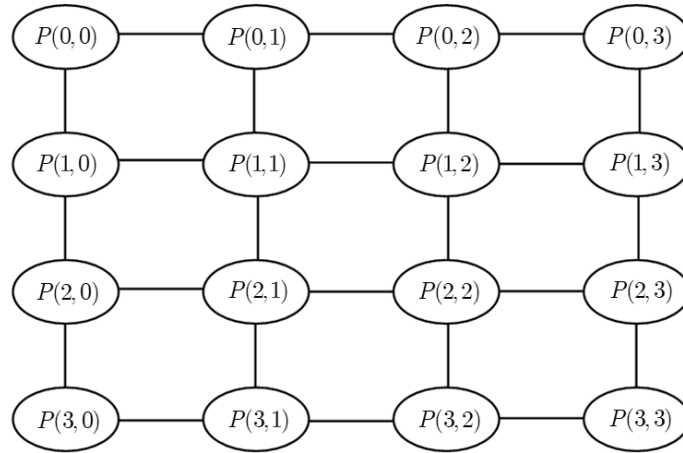
Các bộ xử lý có thể kết nối đơn giản là sắp xếp chúng theo một mảng một chiều (xem hình 3.45). Ưu điểm của mảng một chiều là mỗi bộ xử lý có nhiều nhất 2 đường nối trực tiếp với các bộ xử lý khác. Nhược điểm là nhiều khi cần có thêm rất nhiều các kết nối trung gian để các bộ xử lý trao đổi thông tin với nhau.



Hình 3.35. Sơ đồ mô tả mảng một chiều

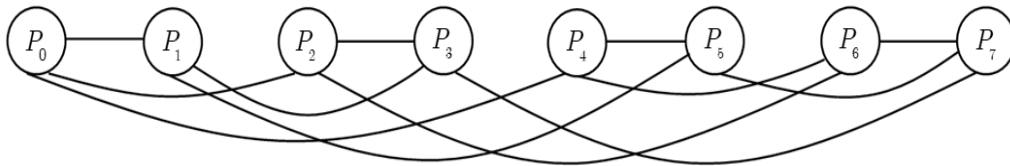
Mạng kiểu lưới (hoặc mảng hai chiều) rất hay được dùng cho các mạng liên kết (xem Hình 3.36). Trong một mạng như thế, số các bộ xử lý là một số chính phương,

$n = m^2$. Các bộ xử lý được gán nhãn $P(i, j)$, $0 \leq i, j \leq m - 1$. Các kết nối hai chiều sẽ nối bộ xử lý $P(i, j)$ với bốn bộ xử lý bên cạnh, tức là với $P(i, j \pm 1)$ và $P(i \pm 1, j)$ chừng nào các bộ xử lý còn ở trong lưới.



Hình 3.36. Sơ đồ mô tả mảng một chiều

Mạng kết nối quan trọng nhất là mạng kiểu siêu khối. Với các mạng loại này số các bộ xử lý là lũy thừa của 2, $n = 2^m$. Các bộ xử lý được gán nhãn là $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$. Mỗi bộ xử lý có liên kết hai chiều với m bộ xử lý khác. Bộ xử lý P_i nối với bộ xử lý có chỉ số biểu diễn bằng dãy nhị phân khác với dãy nhị phân biểu diễn i tại đúng một bit. Mạng kiểu siêu khối cân bằng số các kết nối trực tiếp của mỗi bộ xử lý và số các kết nối gián tiếp sao cho các bộ xử lý có thể truyền thông được. Nhiều máy tính đã chế tạo theo mạng kiểu siêu khối và nhiều thuật toán đã được thiết kế để sử dụng mạng kiểu siêu khối. Đồ thị lập phương Q_m biểu diễn mạng kiểu siêu khối có 2^m bộ xử lý (xem Hình 3.37).



Hình 3.37. Sơ đồ mô tả mạng kiểu siêu khối

3.3. Sơ lược về cây

Một đồ thị liên thông và không có chu trình được gọi là cây. Cây đã được dùng từ năm 1857, khi nhà toán học Anh tên là Arthur Cayley dùng cây để xác định những dạng khác nhau của hợp chất hóa học. Từ đó cây đã được dùng để giải nhiều bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Cây rất hay được sử dụng trong tin học. Chẳng hạn, người ta dùng cây để xây dựng các thuật toán rất có hiệu quả để định vị các phần tử trong một danh sách. Cây cũng dùng để xây dựng các mạng máy tính với chi phí rẻ

nhất cho các đường điện thoại nối các máy phân tán. Cây cũng được dùng để tạo ra các mã có hiệu quả để lưu trữ và truyền dữ liệu. Dùng cây có thể mô hình các thủ tục mà để thi hành nó cần dùng một dãy các quyết định. Vì vậy cây đặc biệt có giá trị khi nghiên cứu các thuật toán sắp xếp.

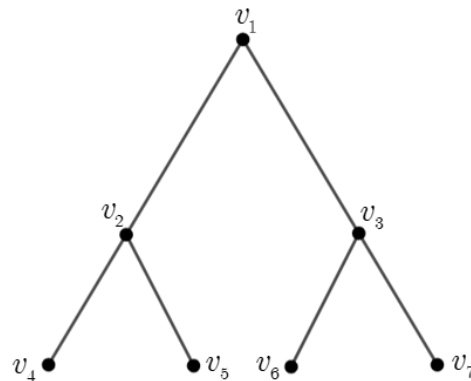
Định nghĩa 3.18. Cây là đồ thị liên thông và không có chu trình. Rừng là một đồ thị có nhiều thành phần liên thông, mỗi thành phần liên thông là một cây.

Gốc của cây là một đỉnh đặc biệt, thông thường là đỉnh trên cùng.

Mức của đỉnh là độ dài đường đi từ gốc đến đỉnh đó (số cạnh của đường đi).

Độ cao của cây là mức lớn nhất của cây (mức của đỉnh cách xa gốc nhất).

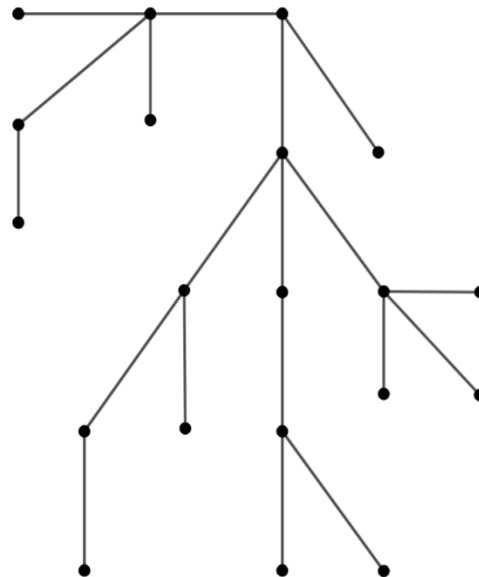
Ví dụ 3.34. Đồ thị trong hình 3.23 là cây



Hình 3.23

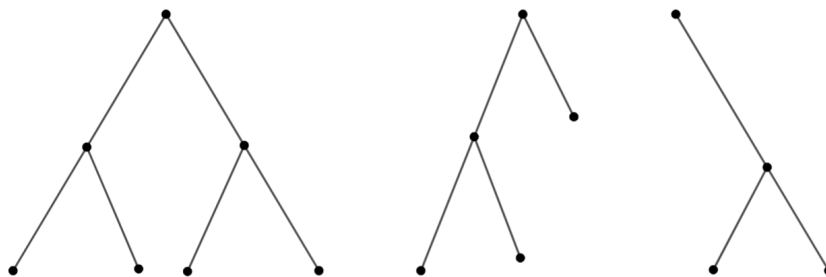
Trong đồ thị ở hình 3.23, nếu ta chọn v_1 là gốc thì v_2, v_3 là những đỉnh mức 1, các đỉnh v_4, v_5, v_6, v_7 có mức 2 và độ cao của cây là 2.

Ví dụ 3.35. Đồ thị trong Hình 3.24 là cây có 20 đỉnh



Hình 3.24

Ví dụ 3.36. Đồ thị trong hình 3.25 là rừng có 3 cây



Hình 3.25

3.3.1. Tính chất cơ bản của một cây

Định lý 3.6. Cho T là một đồ thị có $n \geq 2$ đỉnh. Những điều sau đây tương đương

- (i) T là cây;
- (ii) T không có chu trình và có $n - 1$ cạnh;
- (iii) T liên thông và có $n - 1$ cạnh;
- (iv) T liên thông và mỗi cạnh là một cầu;
- (v) Giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đúng một đường đi nối chúng với nhau;
- (vi) T không có chu trình và nếu thêm vào 1 cạnh giữa hai đỉnh không kề nhau, ta có một chu trình duy nhất.

Hệ quả. Nếu G là một rừng có p cây thì số cạnh của G là $m = n - p$.

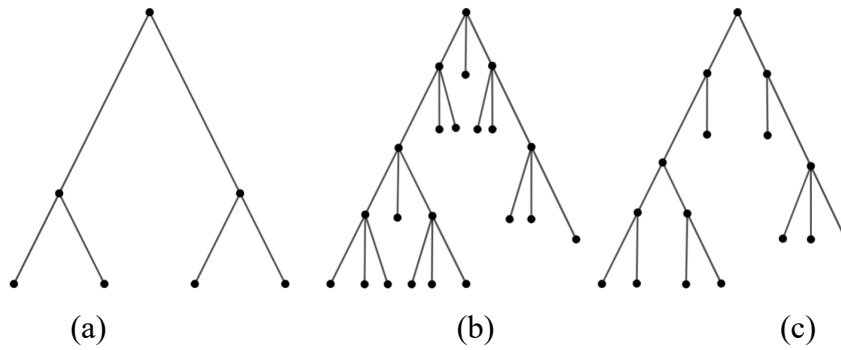
3.3.2. Cây n -phân

Định nghĩa 3.19. Cây n -phân ($n \in \mathbb{N}^*$) là cây mà mọi đỉnh trong đó có tối đa n con và có ít nhất một đỉnh có n con.

Cây n -phân đầy đủ là cây mà mọi đỉnh trong đó có đúng n con.

Cây cân bằng là cây mà mọi đỉnh lá có mức là h hay $h - 1$, trong đó h là chiều cao của cây.

Ví dụ 3.37. Trong hình 3.26 biểu diễn cây nhị phân đầy đủ cân bằng (a), cây tam phân đầy đủ không cân bằng (b) và cây tam phân không đầy đủ không cân bằng (c).



Hình 3.26

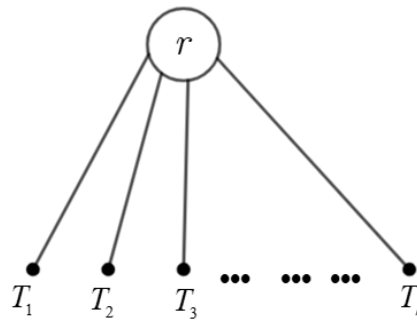
Định nghĩa 3.20. Duyệt cây là liệt kê tất cả các đỉnh của cây thành một dãy, mỗi đỉnh xuất hiện một lần.

Hai phép duyệt cây thường dùng cho cây n -phân bất kì

* *Phép duyệt trước*: Duyệt các đỉnh theo thứ tự như sau (xem hình 3.28)

1. Đến gốc r ;

2. Dùng phép duyệt trước để lần lượt duyệt cây con T_1 rồi cây con T_2 và tiếp tục cho đến cây con T_k theo thứ tự từ trái sang phải.



Hình 3.29

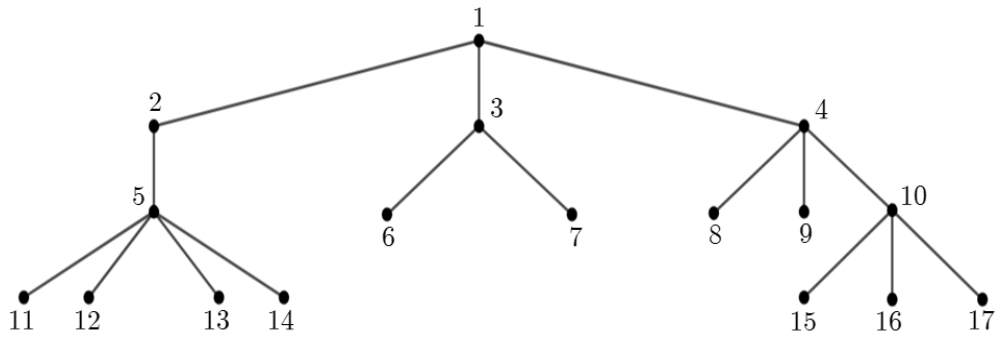
* *Phép duyệt sau*: Duyệt các đỉnh theo thứ tự như sau

1. Lần lượt duyệt cây con T_1 rồi cây con T_2 và tiếp tục cho đến cây con T_k theo thứ tự từ trái sang phải;

2. Đến gốc r .

Nhận xét: Hai phép duyệt khác nhau ở thứ tự duyệt gốc.

Ví dụ 3.38. Xét cây T ở hình 3.29



Hình 3.30

Áp dụng hai phép duyệt cho cây T ở Hình 3.30. Ta thu được kết quả sau

- Trường hợp dùng phép duyệt trước thì các đỉnh của T được liệt kê thành dãy như sau: 1, 2, 5, 11, 12, 13, 14, 3, 6, 7, 4, 8, 9, 10, 15, 16, 17.

- Trường hợp dùng phép duyệt trong thì các đỉnh của T được liệt kê thành dãy như sau: 11, 12, 13, 14, 5, 2, 6, 7, 3, 8, 9, 15, 16, 17, 10, 4, 1.

Riêng trường hợp cây nhị phân, ta có phép duyệt thứ ba sau đây

* *Phép duyệt trong*: Duyệt các đỉnh theo thứ tự như sau

1. Duyệt cây con T_L bằng phép duyệt trong;
2. Đến gốc r ;
3. Duyệt cây con T_R bằng phép duyệt trong.

Ví dụ 3.38. Hai cây nhị phân trong Hình 3.31(a) và Hình 3.31(b) là như nhau. Nhưng khi duyệt bằng phép duyệt trong thì hai cây được xem là khác nhau. Trong Hình (a) thì A là con bên phải của D còn trong Hình (b) thì A là con bên trái của D .

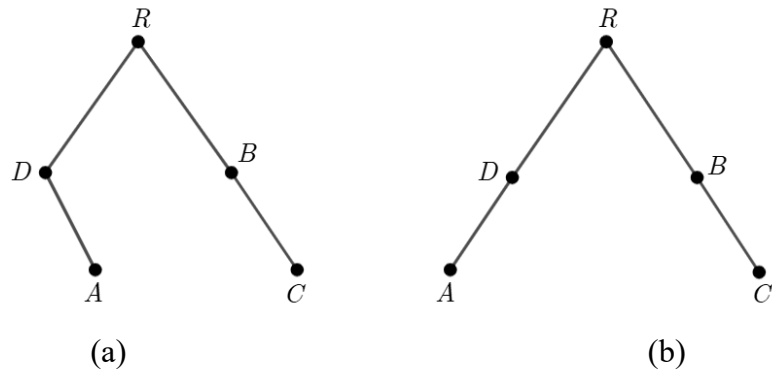
Dùng phép duyệt trong ta thu được

- Dãy các đỉnh trong Hình (a) là: D, A, R, B, C .
- Dãy các đỉnh trong Hình (b) là: A, D, R, B, C .

Trong trường hợp nếu dùng hai phép duyệt trước và sau ta thu được dãy các đỉnh giống nhau cho cả hai Hình (a) và (b) như sau

- Duyệt trước: Dãy các đỉnh là: R, V, A, B, C .
- Duyệt sau: Dãy các đỉnh là: A, V, C, B, R .

Chú ý: Các từ “trước”, “sau” hay “trong” trong các phép duyệt cây ở trên là để chỉ thứ tự xuất hiện của gốc r trong dãy các đỉnh được duyệt.



Hình 3.31

3.3.2. Ký pháp Balan

Ký pháp Ba Lan do nhà logic toán Jan Łukasiewicz đề xuất khoảng năm 1920. Jan Łukasiewicz là một nhà toán học người Ba Lan. Ông sinh ra ở Lwów, Galicia (nay là Lviv, Ukraina). Lĩnh vực nghiên cứu chính của ông là logic toán.

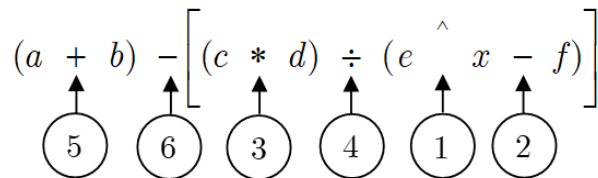
Khái niệm cốt lõi của ký pháp Balan là một cách viết một biểu thức đại số rất thuận lợi cho việc thực hiện các phép toán. Đặc điểm cơ bản của cách viết này là không cần dùng đến các dấu ngoặc và luôn thực hiện từ trái sang phải và biểu diễn biểu thức thành một cây có hướng, gọi là cây nhị phân của biểu thức.

Ví dụ 3.39.

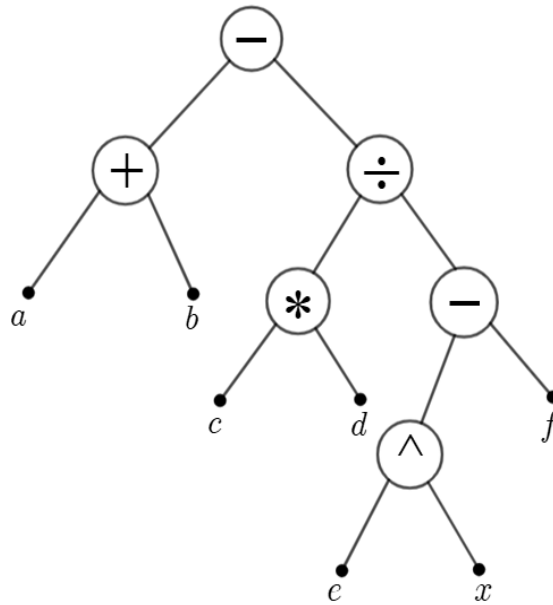
Xét biểu thức

$$(a + b) - \frac{c * d}{e^x - f} \quad (1)$$

Thực hiện tính toán biểu thức (1) theo một thứ tự nhất định như sơ đồ sau



Như vậy, khi thực hiện phép tính này, máy tính phải duyệt qua lại nhiều lần để tìm thứ tự tính toán. Theo ký pháp Balan, ta biểu diễn biểu thức (1) thành cây nhị phân như Hình 3.32.



Hình 3.32. Cây nhị phân của biểu thức trong (1)

- Mỗi biến số được biểu diễn bằng một lá.
- Mỗi đỉnh trong biểu diễn một phép toán cấp 2 với các thành tố là các cây con tại đỉnh đó.

Để có được biểu thức theo ký pháp Balan, ta duyệt cây nhị phân của biểu thức bằng phép duyệt thứ tự trước. Bằng cách như vậy, biểu thức (1) được viết theo cú pháp Balan là

$$- + ab \div * cd - ^ exf \quad (2)$$

Quy tắc tính từ phải sang trái của biểu thức như sau:

Bắt đầu từ bên phải, khi gặp một phép toán thì phép toán này được thực hiện cho hai thành tố ở ngay bên phải của nó, kết quả này là thành tố cho phép toán tiếp theo. Chẳng hạn, với $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$, $d = 7$, $e = 3$, $x = 2$, $f = 2$. thì biểu thức (2) được tính theo trình tự từng bước và cho kết quả bằng 10.

3.4. Bài toán về đường đi ngắn nhất

Định nghĩa 3.21. Cho đồ thị $G = (V, E)$ có trọng số với $V = \{1, 2, \dots, n\}$ và $i, j \in V$. Gọi S là tập hợp tất cả các đường đi từ i đến j .

Xét bài toán

Tìm $P_0 \in S$ sao cho $w(P_0) = \min \{w(P) : P \in S\}$.

Bài toán này gọi là bài toán đường đi ngắn nhất và P_0 gọi là đường đi ngắn nhất từ i đến j . (Trọng số của một cạnh có thể xem là khoảng cách giữa hai đỉnh).

Bài toán tìm đường đi ngắn nhất có nhiều ứng dụng trong thực tế, chẳng hạn: Tìm đường đi ngắn nhất từ một địa điểm này đến một địa điểm khác trong thành phố (Google Map), hay tối ưu hóa trong vận chuyển hàng hóa...

3.4.1. Thuật toán Dijkstra

Tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến những đỉnh khác biết

$$w(e) \geq 0, \forall e \in E.$$

Cụ thể hơn, ta xét bài toán sau: Cho đơn đồ thị liên thông, có trọng số $G = (V, E)$. Tìm khoảng cách $d(u_0, v)$ từ một đỉnh u_0 cho trước đến một đỉnh v bất kỳ của G và tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến v .

Ý tưởng đưa ra phương pháp của thuật toán Dijkstra là: xác định tuần tự đỉnh có khoảng cách đến u_0 từ nhỏ đến lớn.

Trước tiên, đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất chính là u_0 , với $d(u_0, u_0) = 0$. Trong các đỉnh $v \neq u_0$, tìm đỉnh có khoảng cách k_1 đến u_0 là nhỏ nhất. Đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0 .

Giả sử đó là u_1 . Ta có:

$$d(u_0, u_1) = k_1.$$

Trong các đỉnh $v \neq u_0$ và $v \neq u_1$, tìm đỉnh có khoảng cách k_2 đến u_0 là nhỏ nhất. Đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0 hoặc với u_1 .

Giả sử đó là u_2 . Ta có:

$$d(u_0, u_2) = k_2.$$

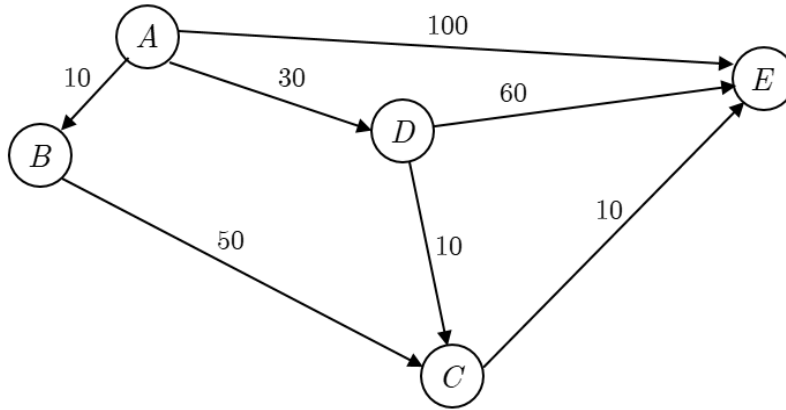
Tiếp tục như trên, cho đến bao giờ tìm được khoảng cách từ u_0 đến mọi đỉnh v của G .

Nếu $V = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ thì:

$$0 = d(u_0, u_0) < d(u_0, u_1) < d(u_0, u_2) < \dots < d(u_0, u_n).$$

Ví dụ 3.40.

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến các đỉnh còn lại trong đồ thị G dưới đây



Hình 3.24

Giả sử đỉnh nguồn $u_0 = A$

Khởi đầu $V = \{A\}$ khi đó:

$$d(A, B) = 10; \quad d(A, D) = 30; \quad d(A, E) = 100; \quad d(A, C) = \infty.$$

1: $V = \{A, B\}$ ta có

$$d(A, B) = 10; \quad d(A, D) = 30; \quad d(A, E) = 100; \quad d(A, C) = 10 + 50 = 60.$$

2: $V = \{A, B, D\}$ ta có

$$d(A, B) = 10; \quad d(A, D) = 30; \quad d(A, E) = 90; \quad d(A, C) = 10 + 30 = 40.$$

3: $V = \{A, B, D, C\}$ ta có

$$d(A, B) = 10; \quad d(A, D) = 30; \quad d(A, E) = 30 + 10 + 10 = 50; \quad d(A, C) = 40.$$

4: $V = \{A, B, D, C, E\}$ ta có

$$d(A, B) = 10; \quad d(A, D) = 30; \quad d(A, E) = 30 + 10 + 10 = 50; \quad d(A, C) = 40.$$

Kết luận:

- Đường đi ngắn nhất từ A đến C là:

$$d(A, C) = d(A, D) + d(D, C) = 30 + 10 = 40.$$

- Đường đi ngắn nhất từ A đến E là:

$$d(A, E) = d(A, D) + d(D, C) + d(C, E) = 30 + 10 + 10 = 50.$$

Mệnh đề: Thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh cho trước đến một đỉnh tùy ý trong đơn đồ thị vô hướng liên thông có trọng số có độ phức tạp là $O(n^2)$.

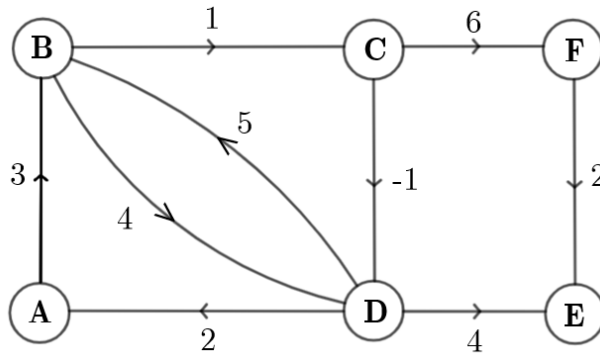
Chứng minh: Thuật toán dùng không quá $n - 1$ bước lặp. Trong mỗi bước lặp, dùng không hơn $2(n - 1)$ phép cộng và phép so sánh để sửa đổi nhãn của các đỉnh.

Ngoài ra, một đỉnh thuộc S_k có nhãn nhỏ nhất nhờ không quá $n - 1$ phép so sánh. Do đó thuật toán có độ phức tạp $O(n^2)$.

Định nghĩa 3.22. Cho đồ thị $G = (V, E)$ với $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Ma trận khoảng cách của G là ma trận $M = (M_{ij})$ với

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = j \\ w(i, j) & \text{nếu } (i, j) \in E \\ \infty & \text{nếu } (i, j) \notin E \end{cases}$$

Ví dụ 3.41.



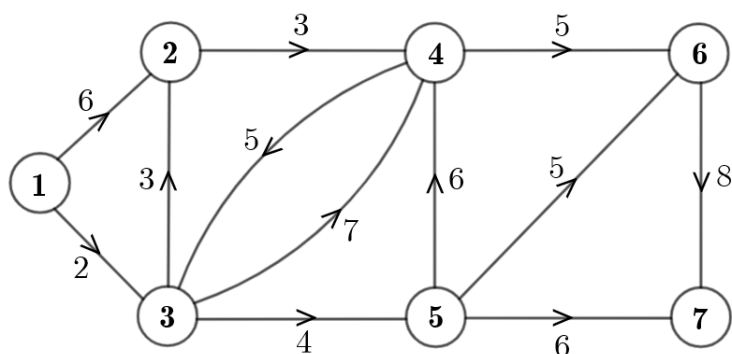
Từ đồ thị trên, theo Định nghĩa 3.22. Ta lập được ma trận khoảng cách sau

$M =$

	A	B	C	D	E	F
A	0	3	∞	∞	∞	∞
B	∞	0	1	4	∞	∞
C	∞	∞	0	-1	∞	6
D	2	5	∞	0	4	∞
E	∞	∞	∞	∞	0	∞
F	∞	∞	∞	∞	2	0

Ví dụ 3.42.

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại trong đồ thị G dưới đây



Từ đồ thị G , ta có ma trận khoảng cách là

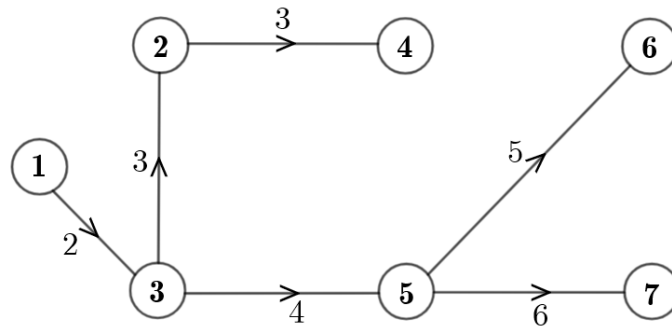
$$M =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	6	2	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	∞	3	∞	∞	∞
3	∞	3	0	7	4	∞	∞
4	∞	∞	5	0	∞	5	∞
5	∞	∞	∞	6	0	5	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	8
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Thuật toán Dijkstra áp dụng cho đồ thị trên được thể hiện trong bảng

1	2	3	4	5	6	7
0^*	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
0	(6, 1)	(2, 1)*	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
0	(5, 3)*	(2, 1)	(9, 3)	(6, 3)	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
0	(5, 3)	(2, 1)	(8, 2)	(6, 3)*	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
0	(5, 3)	(2, 1)	(8, 2)*	(6, 3)	(11, 5)	(12, 5)
0	(5, 3)	(2, 1)	(8, 2)	(6, 3)	(11, 5)*	(12, 5)
0	(5, 3)	(2, 1)	(8, 2)	(6, 3)	(11, 5)	(12, 5)*
0	(5, 3)	(2, 1)	(8, 2)	(6, 3)	(11, 5)	(12, 5)
0	(5, 3)	(2, 1)	(8, 2)	(6, 3)	(11, 5)	(12, 5)

Các đường đi ngắn nhất được thể hiện bằng đồ thị trong Hình 3.42 và gọi là cây đường đi.



3.4.2. Thuật toán Ford-Bellman

Tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến những đỉnh khác hoặc chỉ ra rằng đồ thị có mạch âm (trọng số âm).

Bước 1. Mỗi nút tính khoảng cách giữa nó và tất cả các nút khác trong hệ thống tự chủ và lưu trữ thông tin này trong một bảng.

Bước 2. Mỗi nút gửi bảng thông tin của mình cho tất cả các nút lân cận.

Bước 3. Khi một nút nhận được các bảng thông tin từ các nút lân cận, nó tính các tuyến đường ngắn nhất tới tất cả các nút khác và cập nhật bảng thông tin của chính mình.

Nhận xét: Từ 1 đỉnh xuất phát nhìn hình ta có thể suy ra đường đi ngắn nhất từ đỉnh đó tới các đỉnh khác mà không cần làm lại từ đầu.

Ví dụ 3.23. Dùng thuật toán Ford-Bellman cho đồ thị trong Hình 3.43, ta có kết quả được thể hiện ở bảng sau

k	1	2	3	4	5	6
0	0	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
1	0	(7, 1)	$(\infty, -)$	(8, 1)	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
2	0	(7, 1)	(11, 2)	(8, 1)	(9, 2)	(8, 2)
3	0	(7, 1)	(10, 6)	(6, 6)	(9, 2)	(8, 2)
4	0	(7, 1)	(10, 6)	(6, 6)	(8, 4)	(8, 2)
5	0	(7, 1)	(10, 6)	(6, 6)	(8, 4)	(8, 2)

Từ đó ta có cây đi ngắn nhất

Mệnh đề: Thuật toán Ford-Bellman có độ phức tạp là $O(n^3)$.

Chú ý: Ưu điểm của thuật toán Ford-Bellman là giải quyết được bài toán đồ thị có trọng số âm còn thuật toán Dijkstra không giải quyết được.

TIÊU KẾT CHƯƠNG 3

A. Hệ thống nội dung trọng tâm

Trọng tâm của chương gồm các nội dung sau:

1. Thuật toán và tính độ phức tạp của thuật toán.
2. Lý thuyết đồ thị và một số ứng dụng của các đồ thị đặc biệt.
3. Sơ lược về Cây và duyệt Cây.
4. Một số thuật toán tìm đường đi ngắn nhất.

B. Nội dung thảo luận - nhiệm vụ tự học

1. Thảo luận nhóm và báo cáo về các nội dung
 - Xây dựng và mô tả một số thuật toán, xác định độ phức tạp của thuật toán, tìm hiểu một số thuật toán liên quan làm cơ sở cho các học phần tin học.
 - Đồ thị vô hướng, có hướng, đồ thị Euler, đồ thị Hamilton và những bài toán thực tế liên quan.
 - Duyệt cây, cây nhị phân và các bài toán liên quan làm cơ sở cho các học phần tin học
 - Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất Dijkstra và *Ford-Bellman*, đồng thời phân tích những điểm và hạn chế của từng thuật toán. Tìm ví dụ chứng tỏ rằng thuật toán Dijkstra không thể áp dụng cho đồ thị có trọng số âm; Tìm hiểu thêm một số thuật toán tìm đường đi ngắn nhất và nêu lên những ứng dụng thực tế cũng như cơ sở ứng dụng vào các môn học liên quan đến tin học.

2. Nhiệm vụ tự học

- Đọc, nghiên cứu để hiểu được các định nghĩa, định lý và chứng minh định lý (nếu có), hệ quả, mệnh đề, ví dụ, nhận xét, chú ý trong nội dung mỗi mục và tiểu mục sau khi học.
- Làm các bài tập từ 3.1 đến 3.35 trong phần bài tập cuối chương theo nội dung đã được học.

C. Bài tập chương

3.1. Tìm một số nguyên n nhỏ nhất sao cho $f(x)$ là $O(xn)$ đối với các hàm $f(x)$ sau:

a. $f(x) = 2x^3 + x^2 \log x.$

b. $f(x) = 2x^3 + (\log x)^4.$

c. $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + 1}.$

d. $f(x) = \frac{x^5 + 5 \log x}{x^4 + 1}$.

3.2. Chứng minh rằng:

a. $x^2 + 4x + 7$ là $O(x^3)$, nhưng x^3 không là $O(x^2 + 4x + 17)$.

b. $x \log x$ là $O(x^2)$ nhưng x^2 không là $O(x \log x)$.

3.3. Cho một đánh giá big-O đối với các hàm cho dưới đây. Đối với hàm $g(x)$ trong đánh giá $f(x)$ là $O(g(x))$, hãy chọn hàm đơn giản có bậc thấp nhất.

a. $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$.

b. $(n \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$.

c. $n^{2^n} + n^{n^2}$.

3.4. Cho H_n là số điều hòa thứ n :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}. \text{ Chứng minh rằng } H_n \text{ là } O(\log n).$$

3.5. Lập một thuật toán tính tổng tất cả các số nguyên trong một bảng.

3.6. Lập thuật toán tính x_n với x là một số thực và n là một số nguyên.

3.7. Mô tả thuật toán chèn một số nguyên x vào vị trí thích hợp trong dãy các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ xếp theo thứ tự tăng dần.

3.8. Tìm thuật toán xác định vị trí gặp đầu tiên của phần tử lớn nhất trong bảng liệt kê các số nguyên, trong đó các số này không nhất thiết phải khác nhau.

3.9. Tìm thuật toán xác định vị trí gặp cuối cùng của phần tử nhỏ nhất trong bảng liệt kê các số nguyên, trong đó các số này không nhất thiết phải khác nhau.

3.10. Mô tả thuật toán đếm số các số 1 trong một chuỗi bit bằng cách kiểm tra mỗi bit của chuỗi để xác định nó có là bit 1 hay không.

3.11. Thuật toán tìm kiếm tam phân. Xác định vị trí của một phần tử trong một bảng liệt kê các số nguyên theo thứ tự tăng dần bằng cách tách liên tiếp bảng liệt kê đó thành ba bảng liệt kê có kích thước bằng nhau (hoặc gần bằng nhau nhất có thể được) và giới hạn việc tìm kiếm trong một bảng liệt kê còn thích hợp. Hãy chỉ rõ các bước của thuật toán đó.

3.12. Lập thuật toán tìm trong một dãy các số nguyên số hạng đầu tiên bằng một số hạng nào đó đứng trước nó trong dãy.

3.13. Lập thuật toán tìm trong một dãy các số nguyên tất cả các số hạng lớn hơn tổng tất cả các số hạng đứng trước nó trong dãy.

3.14. Cho đánh giá big-O đối với số các phép so sánh được dùng bởi thuật toán trong Bài tập 3.10.

3.15. Đánh giá độ phức tạp của thuật toán tìm kiếm tam phân được cho trong Bài tập 3.11.

3.16. Đánh giá độ phức tạp của thuật toán trong Bài tập 3.12.

3.17. Mô tả thuật toán tính hiệu của hai khai triển nhị phân.

3.18. Lập một thuật toán để xác định $a > b$, $a = b$ hay $a < b$ đối với hai số nguyên a và b ở dạng khai triển nhị phân.

3.19. Đánh giá độ phức tạp của thuật toán tìm khai triển theo cơ số b của số nguyên n qua số các phép chia được dùng.

3.20. Hãy cho thuật toán đệ quy tìm tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên.

3.21. Hãy cho thuật toán đệ quy tìm số cực đại của tập hữu hạn các số nguyên.

3.22. Mô tả thuật toán đệ quy tìm $x^n \bmod m$ với n , x , m là các số nguyên dương.

3.23. Hãy nghĩ ra thuật toán đệ quy tính a^{2^n} trong đó a là một số thực và n là một số nguyên dương.

3.24. Hãy nghĩ ra thuật toán đệ quy tìm số hạng thứ n của dãy được xác định như sau: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ và $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \dots$

3.25. Thuật toán đệ quy hay thuật toán lặp tìm số hạng thứ n của dãy trong Bài tập 24 là có hiệu quả hơn?

3.26. Xét xem G có là đồ thị Euler không? Nếu không, G có thể vẽ bằng mấy nét?

3.27. Có thể nào thực hiện tất cả các nước đi của một con mã trên bàn cờ vua và trở về ô xuất phát không?

3.28. Cho các ví dụ về

- a. Một đồ thị Euler nhưng không phải là đồ thị Hamilton.
- b. Một đồ thị Hamilton nhưng không phải là đồ thị Euler.
- c. Một đồ thị Euler đồng thời là đồ thị Hamilton.

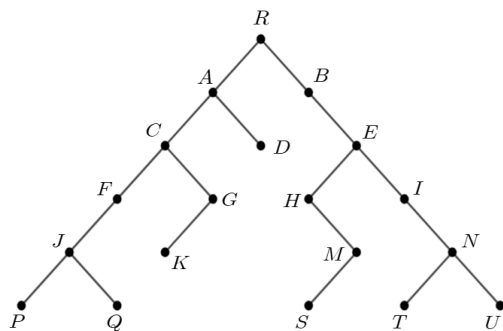
3.29. Một cuộc họp có ít nhất ba đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất hai đại biểu khác. Chứng minh rằng có thể xếp được một số đại biểu ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà đại biểu đó quen.

3.30. Một lớp học có ít nhất 4 sinh viên. Mỗi sinh viên thân với ít nhất 3 sinh viên khác. Chứng minh rằng có thể xếp một số chẵn sinh viên ngồi quanh một cái bàn tròn để mỗi sinh viên ngồi giữa hai sinh viên mà họ thân.

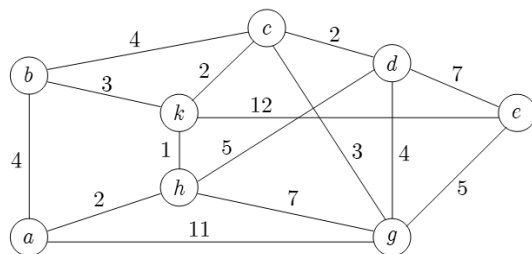
3.31. Trong một cuộc họp có đúng hai đại biểu không quen nhau và mỗi đại biểu này có một số lẻ người quen đến dự. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp một số đại biểu ngồi chen giữa hai đại biểu nói trên, để mỗi người ngồi giữa hai người mà anh ta quen.

3.32. Một thành phố có n ($n \geq 2$) nút giao thông và hai nút giao thông bất kỳ đều có số đầu mỗi đường ngầm tới một trong các nút giao thông này đều không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng từ một nút giao thông tùy ý ta có thể đi đến một nút giao thông bất kỳ khác bằng đường ngầm.

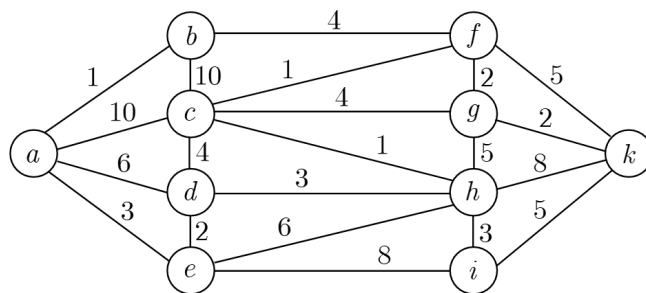
3.33. Hãy duyệt cây nhị phân sau



3.34. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh khác trong đồ thị hình dưới đây:



3.35. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh khác trong đồ thị sau:



CHƯƠNG 4. ĐẠI SỐ BOOLE VÀ HÀM BOOLE

Các mạch điện trong máy tính và các dụng cụ điện tử khác đều có các đầu vào, mỗi đầu vào là số 0 hoặc số 1, và tạo ra các đầu ra cũng là các số 0 và 1. Các mạch điện đó đều có thể được xây dựng bằng cách dùng bất kì một phần tử cơ bản nào có hai trạng thái khác nhau. Chúng bao gồm các chuyển mạch có thể ở hai vị trí mở hoặc đóng và các dụng cụ quang học có thể là sáng hoặc tối. Năm 1938 Claude Shannon chứng tỏ rằng có thể dùng các quy tắc cơ bản của logic để thiết kế các mạch điện. Các quy tắc này đã tạo nên cơ sở của đại số Boole. Sự hoạt động của một mạch điện được xác định bởi một hàm Boole chỉ rõ giá trị của đầu ra đối với mỗi tập đầu vào.

Bước đầu tiên trong việc xây dựng một mạch điện là biểu diễn hàm Boole của nó bằng một biểu thức được lập bằng cách dùng các phép toán cơ bản của đại số Boole. Biểu thức mà ta sẽ nhận được có thể chứa nhiều phép toán hơn mức cần thiết để biểu diễn hàm đó.

4.1. Đại số Boole

4.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.1. Tập hợp khác rỗng A , xét các phép toán nhân $(\wedge)$, cộng $(\vee)$.

i) Ta nói phép toán nhân, phép toán cộng có *tính kết hợp* nếu với mọi $x, y, z \in A$, ta có:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \text{ và } x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

ii) Ta nói phép toán nhân, phép toán cộng có *tính giao hoán* nếu với mọi $x, y \in A$, ta có:

$$x \vee y = y \vee x \text{ và } x \wedge y = y \wedge x.$$

iii) Ta nói phép toán nhân, phép toán cộng có *tính phân phối* nếu với mọi $x, y \in A$, ta có:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ và } x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

iv) Phần tử 1 được gọi là *phần tử trung hòa của phép nhân* nếu $\forall x \in A$, ta có:

$$\text{và } x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$$

v) Phần tử 0 được gọi là *phần tử hòa của phép cộng* nếu $\forall x \in A$ ta có:

$$x \vee 0 = 0 \vee x = x$$

vi) Phần tử $\bar{x}$ được gọi là *phần tử bù* của x nếu

$$x \vee \bar{x} = \bar{x} \vee x = 1 \text{ và } x \wedge \bar{x} = \bar{x} \wedge x = 0.$$

Định nghĩa 4.2. Đại số Boole là tập hợp A cùng với hai phép toán (hai ngôi) $\wedge$ và $\vee$ thỏa mãn các tính chất: Tính kết hợp, tính giao hoán, tính phân phối, tồn tại hai phần tử trung hòa 0, 1 và với mọi $x \in A$ tồn tại $\bar{x}$.

Ví dụ 4.1. 1) Cho tập $E \neq \Phi$, gọi $P(E)$ là tập hợp gồm các tập con của E . Ta có $P(E)$ là một đại số Boole đối với các phép tính tập hợp $\cup$ và $\cap$. Tập M không gian các mệnh đề là một đại số Boole đối với phép tuyển $\vee$ và phép hội $\wedge$.

2) Do 30 không chia hết cho chính phương, U_{30} là dàn bù phân bố và do đó là một đại số Boole với các phép toán

$$x \vee y = BSCNN(x, y), \quad x \wedge y = USCLN(x, y)$$

3) Tập hợp $B = \{0, 1\}$ là một đại số Boole đối với các phép toán: $x \wedge y = xy$ và $x \vee y = x + y - xy$. Phần bù của x chính là $\bar{x} = 1 - x$.

Đại số Boole này đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết về các hàm Boole.

Chú ý. Phần bù $\bar{x}$ của một phần tử x là duy nhất và hơn nữa ta có Quy tắc De Morgan.

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \quad \text{và} \quad \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

4.1.2. Tính chất

Định lý 4.1. Trong đại số Boole A , định nghĩa quan hệ: $x\theta y \Leftrightarrow x \wedge y = x$. Khi đó θ là một thứ tự trên A sao cho A là một dàn bù phân bố đối với thứ tự này. Hơn nữa, với mọi $x, y \in A$, ta có:

$$\sup(x, y) = x \vee y, \quad \inf(x, y) = x \wedge y$$

Chứng minh. Trước hết ta kiểm tra θ là một thứ tự trên A .

Tính phản xạ:

Với mọi $x \in A$ ta có:

$$x \wedge x = (x \wedge x) \vee 0 = (x \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) = x \wedge (x \vee \bar{x}) = x \wedge 1 = x.$$

Nghĩa là $x\theta x$.

Tính phản đối xứng:

Với $x, y \in A$ sao cho $x\theta y$ và $y\theta x$ ta có:

$$x \wedge y = x \text{ và } y \wedge x = y$$

Do tính giao hoán của $\wedge$ ta có $x = y$.

Tính bắc cầu:

Với $x, y, z \in A$ sao cho $x\theta y$ và $y\theta z$ ta có:

$$x \wedge y = x \text{ và } y \wedge z = y$$

Suy ra $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$. Nghĩa là $x\theta z$.

Với $x, y \in A$ tùy ý, ta có: $(x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$ nên $(x \wedge y)\theta x$.

Tương tự $(x \wedge y) = (y \wedge x)\theta y$. Thế nên $(x \wedge y)$ là chặn dưới chung của x và y .

Gọi z là một chặn dưới chung bất kì của x, y . Ta có $z \wedge x = z$ và $z \wedge y = z$. Do đó $z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$. Nghĩa là $z\theta(x \wedge y)$. Vậy $x \wedge y = \inf(x, y)$.

Bây giờ do iv) của Định nghĩa 4.1, 1 chính là phần tử lớn nhất.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác, với } x \in A \text{ tùy ý: } 0 \wedge x &= (0 \wedge x) \vee 0 = (0 \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) \\ &= (0 \vee \bar{x}) \wedge x = \bar{x} \wedge x = 0 \end{aligned}$$

Nghĩa là 0 là phần tử bé nhất của A .

Sau cùng với mọi $x, y \in A$, ta có:

$$x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y)$$

Mà $0 \wedge y = 0$ nên $x \wedge (x \vee y) = x \vee 0 = x$.

Nghĩa là $x\theta(x \vee y)$. Tương tự $y\theta(y \vee x) = (x \vee y)$.

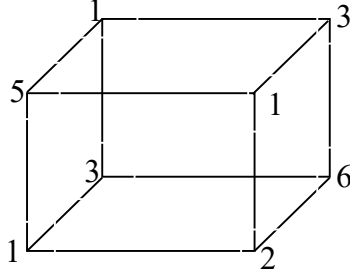
Gọi z là một chặn trên chung của x và y . Ta có:

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = x \vee y$$

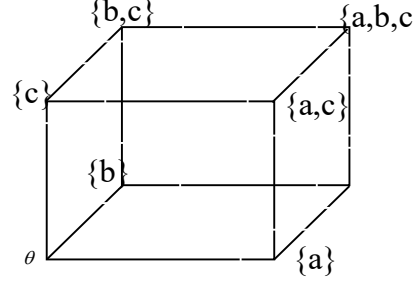
Nghĩa là $(x \vee y)\theta z$. Do đó $x \vee y = \sup(x, y)$.

Tóm lại A là một dàn bù phân bố với phần tử lớn nhất và bé nhất là 1, 0. Hơn nữa do v) của Định nghĩa 4.1 nên $\bar{\bar{x}}$ chính là phần bù của (đpcm).

Do Định lí 4.1, mỗi đại số Boole hữu hạn được liên kết với một biểu đồ Hasse. Ta hãy quan sát hai đại số Boole U_{30} và $P(\{a, b, c\})$. Tuy được định nghĩa khác nhau, các đại số Boole này có hai biểu đồ Hasse “đồng dạng”



Hình 4.1



Hình 4.2

Từ hai biểu đồ trên, ta có thể xây dựng được một song ánh φ giữa U_{30} và $P(\{a, b, c\})$ sao cho các đỉnh tương ứng với nhau $1 \mapsto \{\emptyset\}$, $2 \mapsto \{a\}$, $3 \mapsto \{b\}$, ... và hai đỉnh được nối bởi một cạnh của U_{30} sẽ tương ứng với hai đỉnh được nối bởi một cạnh của $P(\{a, b, c\})$. Nói cách khác ta có một đẳng cấu giữa các tập hợp có thứ tự. Theo Định lí 4.1 ta có $\sup$ và $\inf$ của hai phần tử x, y trong U_{30} tương ứng với $\sup, \inf$ của $\varphi(x), \varphi(y)$.

Định nghĩa 4.3. Đẳng cấu giữa hai đại số Boole A và B là một song ánh $\varphi : A \rightarrow B$ sao cho với mọi $x, y \in A$, ta có:

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$$

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$$

Mệnh đề 4.1. Nếu $\varphi : A \rightarrow B$ là một đẳng cấu đại số Boole thì φ cũng là đẳng cấu tập hợp có thứ tự với những thứ tự trên A và B xác định bởi Định lí 4.1. Đặc biệt, nếu $0, 1$ là phần tử trung hòa của $\wedge, \vee$ trong A thì $\varphi(x), \varphi(y)$ là phần tử trung hòa của $\wedge, \vee$ trong B .

Chứng minh. Giả sử x, y là hai phần tử trong A sao cho $x\theta y$. Khi ấy ta có:

$$x \wedge y = x \Rightarrow \varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \theta \varphi(y).$$

Do 0 và 1 cũng là phần tử bé nhất và lớn nhất của A , ta thấy $\varphi(0)$ và $\varphi(1)$ cũng là phần tử bé nhất và lớn nhất của B , nghĩa là phần tử trung hòa đối với các phép toán $\wedge, \vee$ trong B (đpcm).

Trở lại hai đại số Boole U_{30} và $P(\{a, b, c\})$. Sự đẳng cấu của chúng không phải là trường hợp cá biệt. Ta có:

Định lý 4.2 (Stone). Một đại số Boole hữu hạn A luôn luôn đẳng cấu với $P(E)$, trong đó E là một tập hợp hữu hạn.

Hệ quả 4.1. Số phần tử của một đại số Boole hữu hạn là lũy thừa của 2.

Hệ quả 4.2. Hai đại số Boole hữu hạn có cùng số phần tử thì đẳng cấu với nhau.

Chứng minh. Thật vậy hai đại số Boole cho trước sẽ đẳng cấu với $P(E_1)$ và $P(E_2)$. Do chúng có cùng số phần tử. Từ $2^{|E_1|} = 2^{|E_2|} \Rightarrow |E_1| = |E_2|$.

Khi đó, nếu f là một song ánh giữa E_1 và E_2 thì f sẽ cảm sinh một đẳng cấu giữa $P(E_1)$ và $P(E_2)$ như sau:

$$\begin{aligned} \varphi : P(E_1) &\rightarrow P(E_2) \\ A &\mapsto f(A) \end{aligned}$$

Khi đó ta có: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Nghĩa là $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$.

Hơn nữa do f là song ánh ta cũng có:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B). \text{ Nghĩa là } \varphi(A \wedge B) = \varphi(A) \wedge \varphi(B) \text{ (đpcm)}$$

Bây giờ để chứng minh Định lý Stone ta cần tìm tập hợp E , để ý rằng ta có một đơn ánh:

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow P(E) \\ x &\mapsto \{x\} \end{aligned}$$

Hơn nữa trong $P(E)$, các tập hợp $\{x\}$ chính là các trội trực tiếp của $\emptyset$. Từ đó ta có định nghĩa.

Định nghĩa 4.4. Trong một đại số Boole A , một *trội trực tiếp* của phần tử bé nhất được gọi là *một nguyên tử* của A .

Bổ đề 4.1. Giả sử A là một đại số Boole hữu hạn với phần tử bé nhất 0 . Khi ấy mọi phần tử $x \neq 0$ đều có thể viết dưới dạng $x = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$, trong đó $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là tập hợp các nguyên tử trội bởi T . Hơn nữa nếu $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các nguyên tử sao cho:

$$x = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n \text{ thì } \{b_1, b_2, \dots, b_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Gọi E là tập hợp tất cả các nguyên tử của A . Nhờ Bổ đề 4.1, ta có một ánh xạ $\varphi : A \rightarrow P(A)$ được định nghĩa như sau: $\varphi(0) = \Phi$. Nếu $x \neq 0$ thì $\varphi(x)$ là tập hợp tất cả các nguyên tử trội bởi x . Khi đó Định lý 4.2 là hệ quả của định lý sau

Định lý 4.3: p là một đẳng cấu giữa A và $P(A)$.

Chứng minh. Giả sử $0 \neq x\theta y$. Khi ấy các nguyên tử trội bởi x cũng là nguyên tử trội bởi y nên $\varphi(x) \subset \varphi(y)$. Ngược lại giả sử $\Phi \neq \varphi(x) \subset \varphi(y)$. Ta viết

$$\varphi(x) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ và } \varphi(y) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

Do Bổ đề 4.1 ta có:

$$x = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \text{ và } y = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n.$$

Do $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ nên $x\theta y$.

Trường hợp $x = 0$ là hiển nhiên.

Tóm lại, ta đã chứng minh:

$$x\theta y \Leftrightarrow \varphi(x) \subset \varphi(y)$$

Đặt biệt, nếu $\varphi(x) = \varphi(y)$ thì $x\theta y$ và $y\theta x$ nên $x = y$. Hay φ là đơn ánh.

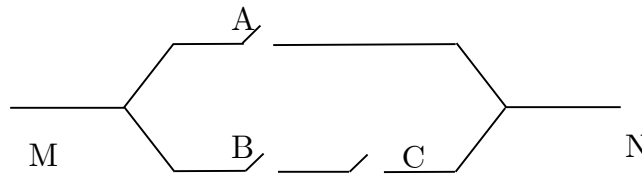
Giả sử $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset E$, đặt $x = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ và $\varphi(x) = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n$.

Do Bổ đề 4.1 nên $x = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n$ và $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Hay φ là toàn ánh (đpcm).

4.2. Hàm Boole

4.2.1. Khái niệm cơ bản

Xét sơ đồ của mạch điện gồm 3 ngắt điện (Hình 4.3). Tùy theo các ngắt điện A , B , C được đóng hay mở, sẽ có hoặc không có dòng điện đi qua từ M đến N . Muốn vậy ta vẽ ra sơ đồ cho tất cả mọi trường hợp. Tuy nhiên điều này không thể thực hiện được nếu số ngắt điện rất lớn. Ví dụ nếu có 100 ngắt điện, sẽ có tất cả 2^{100} sơ đồ khác nhau. Ngay cả trong trường hợp số ngắt điện bé, thì vẫn cần một cách sắp xếp có hệ thống các sơ đồ để có thể tra cứu dễ dàng từng trường hợp.



Hình 4.3

Để đơn giản người ta liên kết với mỗi ngắt điện một biến, biến này lấy giá trị là 1 nếu ngắt điện đóng và lấy giá trị là 0 nếu ngắt điện mở. Trong ví dụ về mạch điện nói trên, ta có ba biến a , b , c . Ngoài ra, toàn mạch điện còn được liên kết với biến d lấy giá trị 1 nếu có dòng điện đi từ M đến N và lấy giá trị 0 trong trường hợp không có dòng điện từ M đến N . Với tương ứng như vậy ta có thể liệt kê tất cả các trường hợp trong bảng giá trị như sau:

a	b	c	d
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Trong trường hợp số ngắt điện lớn thì việc thiết lập bảng giá trị là không thực tế. Ta cần tìm một công thức cho phép biểu diễn hàm $d(a,b,c)$ theo các biến a, b, c như các hàm đa thức trong trường hợp hàm biến thực. Nhận thấy bảng trên là bảng chân trị của các dạng mệnh đề. Bây giờ ta xét hàm $E(p, q, r, \dots)$ theo các biến $p, q, r, \dots$, trong đó $p, q, r, \dots$, và cả E cũng chỉ lấy hai giá trị là 0 và 1. Đó là các hàm Bool theo nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 4.5. Hàm Boole n biến là một ánh xạ $B^n \rightarrow B$, trong đó $B = \{0, 1\}$.

Tập hợp các hàm Boole n biến được kí hiệu bởi F_n .

Chú ý. i) Các hàm Boole còn được gọi là *hàm logic* hay hàm nhị phân.

ii) Tập hợp $B = \{0, 1\}$ là đại số Boole đối với các phép toán

$$a \wedge b = ab,$$

$$a \vee b = a + b - ab$$

$$\overline{a} = 1 - a$$

iii) Các biến xuất hiện trong hàm Boole được gọi là *biến Boole*. Mỗi hàm Boole được liên kết với một bảng (tương tự như bảng trên) nhằm cho biết sự phụ thuộc của hàm Boole theo giá trị của các biến Boole. Ta cũng gọi bảng giá trị này là *Bảng chân trị* của hàm Boole.

iv) Ta kí hiệu F_n là tập hợp 2^{B^n} . Do đó số hàm Boole khác nhau chính là:

$$|F_n| = |2^{B^n}| = 2^{2^n}$$

Mặt khác, tương ứng $A \rightarrow \mathcal{X}_A$ là một đẳng cấu của tập hợp có thứ tự $P(B^n)$ và F_n , trong đó thứ tự trên F_n được xác định như sau: với $f, g \in F_n$ thì

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B^n, f(a) \leq g(a)$$

Khi đó *sup* và *inf* của hai hàm f, g được cho bởi:

$$(f \vee g)(a) = f(a) \vee g(a) = f(a) + g(a) - f(a)g(a), \forall a \in B^n$$

và

$$(f \wedge g)(a) = f(a) \wedge g(a) = f(a)g(a), \forall a \in B^n$$

Phần bù $\overline{f}$ của hàm Boole f được cho bởi $\overline{f}(a) = \overline{f(a)} = f_0 - f(a), \forall a \in B^n$,

trong đó $f_0 : B^n \rightarrow \{1\}$ là hàm hằng.

Để đơn giản ta kí hiệu $f.g$ thay cho $f \wedge g$ và $f_0 - f$ thay cho $\bar{f}$.

Với các phép toán trên, F_n trở thành một đại số Boole đẳng cấu với $P(B^n)$. Đặc biệt các nguyên tử trong B^n tương ứng với các nguyên tử trong $P(B^n)$. Mà trong $P(B^n)$ các nguyên tử chính là các tập hợp thu về một điểm nên ta có:

4.2.2. Tính chất

Mệnh đề 4.2. Các nguyên tử trong F_n là các hàm Boole chỉ khác 0 tại một điểm duy nhất. Tức là bảng giá trị chân lí của nó chỉ có một dòng duy nhất ở đó hàm khác 0. Các hàm này được gọi là các *từ tối tiểu* của F_n .

Theo Định lí Stone ta có:

Mệnh đề 4.3. Mỗi hàm Boole f đều được viết dưới dạng:

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_i \quad (4.1)$$

trong đó $m_1, m_2, \dots, m_i$ là các từ tối tiểu trội bởi f .

Do từ tối tiểu m_i chỉ khác 0 duy nhất ở một dòng, m_i sẽ được trội bởi f khi và chỉ khi dòng mà m_i khác 0 cũng là một trong những dòng mà f khác 0. Từ đó ta có quy tắc viết $f = m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_i$ bằng cách chọn các m_i chính là các từ tối tiểu tương ứng với một dòng khác 0 nào đó của f . Chẳng hạn như trong ví dụ về hàm $d(a, b, c)$ biểu diễn mạch điện ở trên ta có

a	b	c	d	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1

Trong đó $d = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5$.

Bây giờ để có một công thức tường minh cho một hàm Boole bất kì, ta cần tìm công thức tường minh cho các từ tối tiểu. Xét phép chiếu thứ i được cho bởi

$$\pi_i : B^n \rightarrow B$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

Rõ ràng π_i là một hàm Boole n biến mà giá trị của nó chỉ phụ thuộc biến thứ i . Tương tự như các hàm thực ta sẽ dùng cùng kí hiệu x_i để chỉ hàm Boole π_i :

$$x_i(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) = a_i$$

Với kí hiệu này thì phần bù $\overline{x_i} = 1 - x_i$ cũng là một hàm Boole mà giá trị chỉ phụ thuộc vào biến thứ i . Ta nói $x_i, \overline{x_i}$ là các từ đơn. Có tất cả $2n$ từ đơn.

Mệnh đề 4.4. Các từ tối tiểu đều có thể viết dưới dạng $m = b_1 b_2 \dots b_n$ trong đó $b_i = x_i$ hoặc $b_i = \overline{x_i}$.

Chú ý. i) Do mỗi b_i có thể lấy hai giá trị $x_i, \overline{x_i}$ nên ta tìm lại được số từ tối tiểu chính là số phần tử của $B^n : 2^n$.

ii) Ta có quy tắc viết biểu thức một từ tối tiểu ứng với điểm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$:

Bước 1: Viết tích tất cả các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Bước 2: Gạch biến thứ i khi $a_i = 0$. Chẳng hạn trong ví dụ về mạch điện ở trên các từ tối tiểu $m_1, m_2, \dots, m_5$ có biểu diễn như sau:

$$m_1 = \overline{a}bc$$

$$m_2 = a\overline{b}c$$

$$m_3 = a\overline{b}\overline{c}$$

$$m_4 = a\overline{b}c$$

$$m_5 = abc$$

Do đó, ta có: $d = \overline{a}bc \vee a\overline{b}c \vee a\overline{b}\overline{c} \vee abc \vee abc$.

iii) Tổng quát hơn, một hàm Boole bất kì f có thể viết như là tổng Boole của các từ tối tiểu trội bởi f , và mỗi từ tối tiểu này được viết như là tích của n biến. Công thức này được gọi là dạng nổi rời chính tắc của f .

iv) Thay vì các từ tối thiểu, ta có thể xét các từ tối đại, đó là phần bù của các từ tối thiểu. Khi đó, do Mệnh đề 4.4 nên mỗi từ tối đại sẽ là tổng Boole của n từ đơn. Hơn nữa, ta có thể viết f như là tích của các từ tối đại. Đây chính là dạng nối liền chính tắc của hàm Boole f .

Định nghĩa 4.6. i) Đơn thức là một tích khác 0 của các từ đơn.

ii) Công thức đa thức của hàm Boole f là công thức biểu diễn f dưới dạng tổng Boole của các đơn thức.

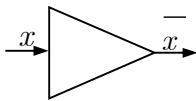
Chú ý. Do $x_i x_i = x_i$ và $x_i \overline{x_i} = 0$ nên trong một đơn thức m , biến x_i hoặc $\overline{x_i}$ có thể xuất hiện nhưng không đồng thời xuất hiện. Nói cách khác, mỗi đơn thức có thể viết như là tích $b_1 b_2 \dots b_m$, trong đó b_i lấy một trong ba giá trị $1, x_i, \overline{x_i}$. Do đó số đơn thức khác nhau là 3^n . Suy ra mỗi hàm Boole chỉ có một số hữu hạn công thức đa thức. Để ý rằng nếu $b_i \neq 1$, ta nói b_i là một thừa số của m . Như thế mỗi đơn thức được viết như là tích của tối đa n thừa số khác nhau.

4.3. Mạng các cổng và công thức đa thức tối thiểu

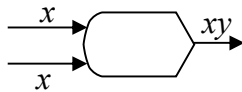
4.3.1. Khái niệm cơ bản

Trong ví dụ về mạch điện, ta đã biểu diễn mạch điện dưới dạng một hàm Boole để khảo sát sự phụ thuộc của output d (có hay không dòng điện chạy qua) theo các input a, b, c (công tắc điện tương ứng đóng hay mở). Bây giờ ta hãy xét bài toán ngược lại. Cho trước một hàm Boole $f(x, y, z, \dots)$, hãy thiết kế một mạng các thiết bị vật lý cho phép tổng hợp nên hàm Boole f .

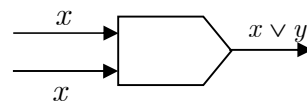
Do Mệnh đề 4.3 và Mệnh đề 4.4, mỗi hàm Boole đều có thể viết thành một công thức trong đó các biến logic (biến Boole) được nối kết lại với nhau bởi các phép toán $\wedge, \vee, \overline{}$. Do đó trước tiên ta cần tổng hợp các phép toán trên. Thiết bị để tổng hợp các phép toán này được gọi là các cổng, chúng được biểu diễn bởi các sơ đồ sau:



Cổng NOT hay đảo điện



Cổng AND

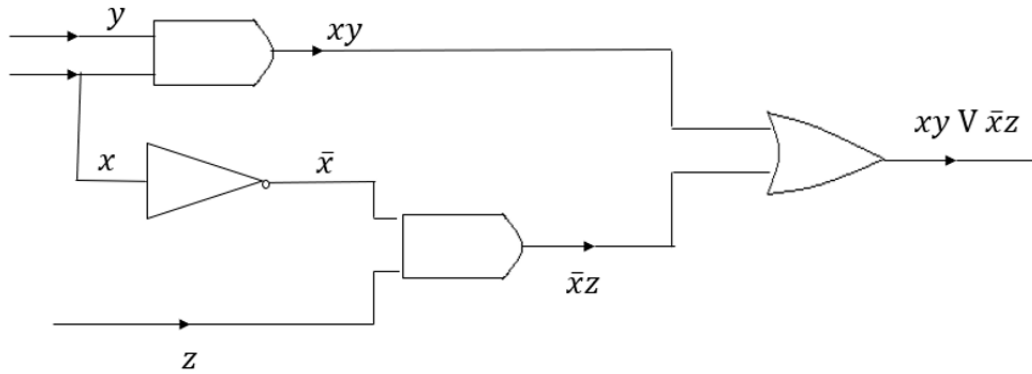


Cổng OR

Hình 4.4

Trong các sơ đồ trên x và y là các tín hiệu vào với hai trạng thái khác nhau cho phép chúng biểu diễn được các biến logic với hai giá trị 0, 1. Ở đầu ra ta cũng có một tín hiệu biểu diễn cho một biến logic phụ thuộc vào các input theo các phép toán $\wedge, \vee, \neg$.

Ví dụ 4.2. Để tổng hợp hàm Boole $f = xy \vee \bar{x}z$, ta có thể sử dụng mạng các cổng sau (Hình 4.5):



Hình 4.5

Trong đó có hai cổng AND, một cổng OR và một cổng NOT.

Mặt khác ta cũng có thể viết hàm f như:

$$f = xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})z = xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$$

Đây chính là dạng nổi rời chính tắc của f vì các số hạng đều là từ tối tiểu. Nếu sử dụng công thức trên để thiết kế một mạng các cổng tổng hợp f , ta phải sử dụng 8 cổng AND và 3 cổng OR, không kể một số cổng NOT.

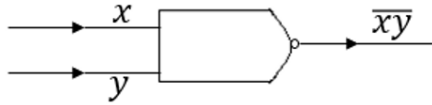
Bài toán đặt ra là phải tìm một công thức tối ưu để tổng hợp một hàm Boole cho trước.

4.3.2. Bài toán tối ưu

Bài toán 1: Giảm số loại cổng.

Thật vậy, ta có thể tổng hợp cổng OR từ cổng NOT và cổng AND (Bài tập). Do đó mọi hàm Boole đều có thể được tổng hợp mà chỉ dùng cổng NOT và cổng AND. Thật

ra ta có thể đặt hai cổng này lại chung thành một cổng có tên là NAND với sơ đồ (Hình 4.6):

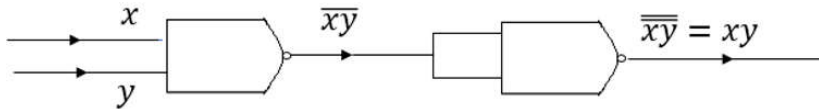


Hình 4.6

Khi ấy cổng NOT và cổng AND có thể được tổng hợp như sau (Hình 4.7 và Hình 4.8):



Hình 4.7



Hình 4.8

Từ đó có thể tổng hợp cổng *OR* mà chỉ dùng cổng *NAND* như trong bài tập nêu trên. Suy ra mọi hàm Boole đều được tổng hợp mà chỉ dùng cổng *NAND*. Bên cạnh cổng *NAND* ta cũng có cổng *NOR* (*NOT OR*) với sơ đồ:



Hình 4.9

Khi ấy ta cũng chứng minh được mọi hàm Boole đều được tổng hợp mà chỉ sử dụng cổng *NOR* (Bài tập).

Bài toán 2: Cực tiểu hóa thời gian chậm trễ. Mục tiêu là làm giảm thời gian chậm trễ khi đi qua một cổng. Tuy khoảng thời gian này là nhỏ nhưng nếu tích lũy qua nhiều lớp cổng thì nó trở thành đáng kể, nhất là trong các máy tính có tốc độ cao.

Bài toán 3: Cực tiểu hóa số cổng sử dụng.

Do thời gian chậm trễ khi qua cổng *NOT* là không đáng kể, dưới đây khi phân tích các mạch, ta có thể bỏ qua cổng *NOT*. Nói cách khác các biến $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ cũng được xem như là các biến input tương tự như $x, y, z, \dots$

4.4. Phương pháp biểu đồ Karnaugh

4.4.1. Khái niệm cơ bản

Để làm giảm số các số hạng trong một biểu thức Boole biểu diễn một mạch, ta cần phải tìm các số hạng để tổ hợp lại. Có một phương pháp đồ thị, gọi là bản đồ Karnaugh, được dùng để tìm các số hạng tổ hợp được đối với các hàm Boole có số biến tương đối nhỏ. Phương pháp mà ta mô tả dưới đây đã được Maurice Karnaugh đưa ra vào năm 1953. Phương pháp này dựa trên một công trình trước đó của E.W. Veitch. Các bản đồ Karnaugh cho ta một phương pháp trực quan để rút gọn các khai triển tổng các tích, nhưng chúng không thích hợp với việc cơ khí hoá quá trình này. Trước hết, ta sẽ minh họa cách dùng các bản đồ Karnaugh để rút gọn biểu thức của các hàm Boole hai biến.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh cho phép tìm nhanh công thức là đa thức tối thiểu của hàm Boole có ba hoặc bốn biến. Trường hợp ba biến hoàn toàn tương tự nhưng đơn giản hơn trường hợp bốn biến. Do đó ta tập trung trình bày trường hợp bốn biến.

Ta đã biết một hàm Boole bốn biến là một ánh xạ $f : B^4 \rightarrow B$ nên để có thể biểu diễn bằng hình ảnh ta sẽ sử dụng một hình vuông gồm có 16 ô vuông nhỏ biểu diễn 16 phần tử của B^4 . Khi đó ta biểu diễn một hàm Boole $f : B^4 \rightarrow B$ bằng cách gạch chéo các ô ở đó f bằng 1.

Như vậy vấn đề chính là đánh số 16 ô của hình vuông tương ứng với các phần tử của B^4 . Ta đã biết các phần tử của B^4 có thể được xếp theo thứ tự:

0000, 0001, 0010, 0011, ..., 1111.

Ta có thể xếp các phần tử của B^4 theo thứ tự trên lần lượt trên các dòng của hình vuông lớn. Tuy nhiên cách này không thuận tiện bằng cách của Veitch và Karnaugh:

	x		$\bar{x}$	
				$\bar{t}$
z	1010	1110	0110	0010
	1011	1111	0111	0011

$\overline{y}$	1001	1101	0101	0001	t
y	1000	1100	0100	0000	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	Y	y		

Hình 4.10

Ở đây kí hiệu x chỉ cột mà ở đó biến đầu tiên x lấy giá trị 1, $\overline{x}$ chỉ cột ở đó biến x lấy giá trị 0. Tương tự cho biến thứ hai y . Các biến thứ ba z và thứ tư t được gán với các dòng. Ví dụ ở hai dòng đầu biến z là lấy giá trị 1 và hai dòng sau biến z lấy giá trị 0. Tương tự cho biến t .

Cách biểu diễn trên của B^4 rất thuận tiện cho việc biểu diễn các đơn thức. Thật vậy, ta nhận thấy hai ô liên tiếp nhau chỉ khác nhau một thành phần, ví dụ ô ở dòng hai cột hai và ô ở dòng hai cột ba chỉ khác nhau ở thành phần đầu tiên: 1111 và 0111. Mặt khác ô ở dòng một cột một và dòng một cột bốn cũng biểu diễn hai phần tử chỉ khác nhau một thành phần: 1010 và 0010.

Ta quy ước rằng các ô này được xem như kề nhau theo nghĩa rộng: hai ô được gọi là *kề nhau theo nghĩa rộng* nếu sau khi ta cuốn hình vuông lớn theo chiều dọc hay chiều ngang tạo thành hình trụ thì hai ô ban đầu sẽ trở thành kề nhau trên hình trụ. Với quy ước trên ta thấy rằng hai ô kề nhau (theo nghĩa thông thường hay nghĩa rộng) khi và chỉ khi chúng biểu diễn hai phần tử của B^4 chỉ khác nhau một thành phần.

Bây giờ để biểu diễn hàm Boole bốn biến f , ta sẽ gạch chéo các ô của hình vuông lớn tương ứng với các điểm của B^4 ở đó f bằng 1. Ta nói hình vẽ ấy là biểu đồ Karnaugh của hàm Boole f .

Ví dụ như hình vẽ dưới đây chỉ biểu đồ Karnaugh của hàm Boole bốn biến:

$$f = xyzt \vee \overline{xyzt} \vee \overline{xyzt} \vee \overline{xyzt} \vee \overline{xyzt} \vee \overline{xyzt}$$

Hình 4.11

Ta thấy rằng hàm Boole f chính là hàm đặc trưng của tập hợp gạch chéo trong biểu đồ Karnaugh. Do đó sử dụng đẳng cấu giữa hai đại số Boole $P(B^4)$ và 2^{B^4} ta có:

4.4.2. Tính chất

Mệnh đề 4.5. Với mọi hàm Boole bốn biến f, g :

i) Biểu đồ Karnaugh của f là tập hợp con biểu đồ Karnaugh của g khi và chỉ khi $f\theta g$.

ii) Biểu đồ Karnaugh của $f \vee g$ (tương ứng $f \wedge g$) là hợp (tương ứng giao) của các biểu đồ Karnaugh của f và g .

iii) Biểu đồ Karnaugh của $\bar{f}$ là phần bù của biểu đồ Karnaugh của f .

Chú ý. i) Sử dụng Mệnh đề 4.5, ta có thể vẽ được biểu đồ Karnaugh của một hàm Boole nếu biết bảng chân trị của nó hoặc biết được một công thức biểu diễn hàm Boole dưới dạng một biểu thức theo các biến và các phép toán $\vee, \wedge, \bar{}$.

ii) Ngược lại, nếu biết được biểu đồ Karnaugh của hàm Boole f , ta có thể đọc ngay từ đó dạng nổi rời chính tắc. Các từ tối tiểu trội bởi f chính là hàm đặc trưng của mỗi ô nằm trong biểu đồ Karnaugh. Hơn nữa, công thức cho từ tối tiểu như là tích của 4 từ đơn được đọc ngay trong biểu đồ Karnaugh khi xem các dòng và cột chứa ô đang xét: ví dụ như từ đơn ứng với ô ở dòng 3 cột 2 là $\overline{xyzt}$ vì các dòng và cột chứa ô này là $\overline{x, y, z, t}$

iii) Hai từ tối tiểu ứng với hai ô kề nhau (theo nghĩa thông thường hoặc nghĩa rộng) chỉ khác nhau một thừa số là từ đơn. Do đó, ta có thể dùng luật phân bố để đặt thừa số chung trong tổng Boole của chúng và được một đơn thức có ba thừa số là từ đơn. Ví dụ như:

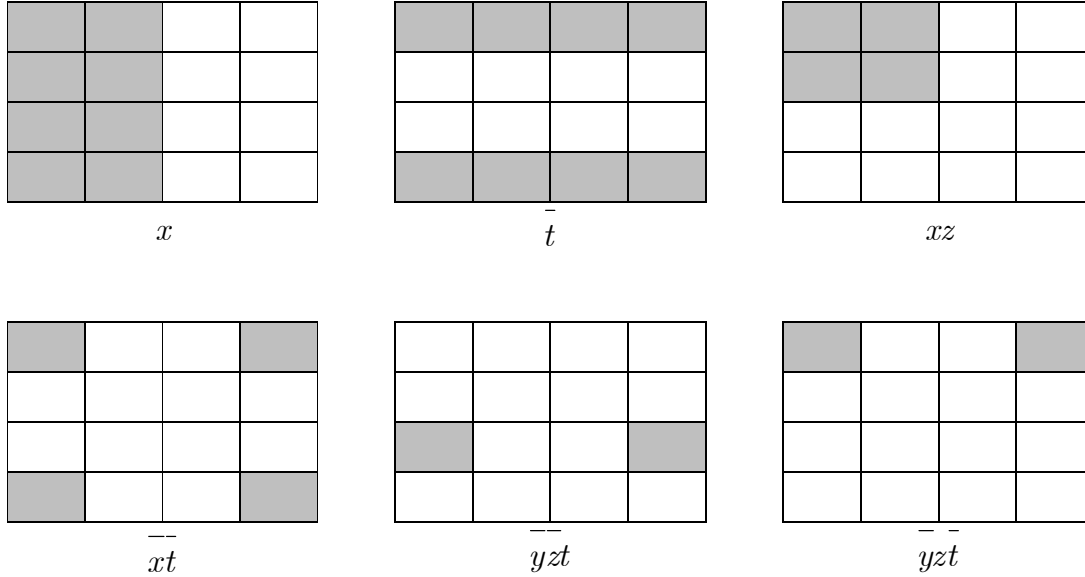
$$xyzt \vee \overline{xyzt} = xyz(t \vee \bar{t}) = xyz$$

có biểu đồ Karnaugh là một hình chữ nhật theo nghĩa rộng gồm hai ô liên tiếp nhau 1110 và 1111.

Tổng quát hơn ta có:

Mệnh đề 4.6. Biểu đồ Karnaugh của một đơn thức có dạng tích của p từ đơn ($1 \leq p \leq 4$) là một hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm 2^{4-p} ô, mà ta gọi là các *tế bào*.

Ví dụ 4.3.



Hình 4.12

Do Mệnh đề 4.5 và Mệnh đề 4.6, các tiên đề nguyên tố của một hàm Boole bốn biến có biểu đồ Karnaugh là một tế bào tối đại nằm trong biểu đồ Karnaugh của f , nghĩa là không được bao hàm thực sự bởi một tế bào khác nằm trong biểu đồ Karnaugh của f . Ta nói các tế bào này là *tế bào lớn* của biểu đồ Karnaugh của f . Như vậy việc tìm công thức đa thức tối thiểu của f đưa về việc giải quyết hai vấn đề:

- i) Tìm tất cả các tế bào lớn nằm trong biểu đồ Karnaugh của f .
- ii) Tìm một phép phủ tối thiểu biểu đồ Karnaugh của f bằng các tế bào lớn, nghĩa là một họ tế bào lớn có hợp là biểu đồ Karnaugh của f sao cho khi rút bớt một tế bào lớn trong số đó thì họ còn lại không phủ kín biểu đồ Karnaugh của f .

Từ đó ta có thuật toán gồm bốn bước tìm công thức đa thức tối thiểu như sau:

Bước 1: Chỉ ra tất cả các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f . Sau Bước 1, ta sẽ phủ dần biểu đồ Karnaugh bằng các tế bào lớn cho đến khi phủ kín.

Bước 2: Nếu tồn tại một ô chỉ nằm trong một tế bào lớn duy nhất, ta chọn ra tế bào này để phủ. Trong phần còn lại của biểu đồ Karnaugh, nếu có một ô chỉ nằm trong một

tế bào lớn duy nhất, ta chọn ra tế bào này để phủ, và lặp lại Bước 2 cho đến khi không còn ô nào có tính chất trên.

Bước 3: Nếu các tế bào lớn chọn trong Bước 2 đã phủ kín biểu đồ Karnaugh của f ta qua Bước 4. Nếu không, chọn ra một ô còn lại. Trong số các tế bào lớn chứa ô này ta chọn ra một tế bào tùy ý để thêm vào phép phủ, và cứ tiếp tục như trên cho phần còn lại cho đến khi phủ kín biểu đồ Karnaugh của f .

Bước 4: Ở bước này ta đã chọn được một số tế bào lớn phủ kín biểu đồ Karnaugh của f . Do trong Bước 3 có sự lựa chọn tùy ý tế bào lớn chứa một ô, ta thường có nhiều hơn một phép phủ. Trong số các phép phủ nhận được, loại bỏ các phép phủ không tối thiểu. Sau cùng, các phép phủ còn lại cho ta một công thức đa thức của f mà ta còn phải so sánh chúng theo Định nghĩa 4.4: loại bỏ những công thức có một công thức khác trong số đó thực sự đơn giản hơn nó. Các công thức còn lại chính là công thức đa thức tối thiểu phải tìm.

Chú ý. i) Nếu Bước 3 được bỏ qua thì không có sự lựa chọn tùy ý. Trong trường hợp này ta được một phép phủ duy nhất tương ứng với công thức đa thức tối thiểu duy nhất.

ii) Để tiện việc xem xét, ta sẽ gạch chéo mỗi tế bào lớn được chọn cho đến khi phân gạch chéo trùng với biểu đồ Karnaugh của f . Đương nhiên hai cách chọn khác nhau sẽ dẫn đến hai quá trình phủ khác nhau và cho ta hai công thức khác nhau.

Ví dụ 4.4. Xét hàm f có biểu đồ Karnaugh như sau:

Hình 4.13

Bước 1: Biểu đồ Karnaugh của f có 2 tế bào lớn:

Hình 4.14

Bước 2: ô (3,1) nằm duy nhất trong $\overline{xyz}$, ô (1,1) nằm duy nhất trong $\overline{xyt}$. Hai tế bào lớn này đã phủ kín biểu đồ Karnaugh của B nên ta qua Bước 4.

Bước 4: Ta chỉ có duy nhất một phép phủ ứng với công thức đa thức tối thiểu duy nhất của f :

$$f = \overline{xyz} \vee \overline{xyt}$$

Chú ý. Sử dụng công thức trên để tổng hợp hàm Boole f bằng một mạng các cổng, ta cần bốn cổng *AND* và 1 cổng *OR* (không kể cổng *NOT*)

Ví dụ 4.5. Xét hàm f có biểu đồ Karnaugh như sau:

Hình 4.15

Bước 1: Biểu đồ Karnaugh của f có bốn tế bào lớn:

$\overline{xzt}$

$\overline{xyt}$

$\overline{yzt}$

$\overline{xyz}$

Hình 4.16

Bước 2: Ô (2,4) nằm trong tế bào lớn duy nhất $\overline{xzt}$

Ô (4,2) nằm trong tế bào lớn duy nhất $\overline{xyz}$

Gạch chéo hai tế bào lớn này ta được sơ đồ sau:

Hình 4.17

Còn lại ô (3,3) chưa được phủ, nằm trong hai tế bào lớn nên ta qua Bước 3.

Bước 3: Ô (3,3) nằm trong hai tế bào lớn $\overline{xzt}$ và xyz . Chọn tùy ý một trong hai tế bào trên ta đều phủ kín biểu đồ Karnaugh của f .

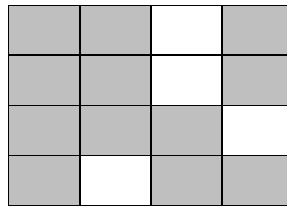
Bước 4: Ta được phép phủ tối thiểu tương ứng với hai công thức đa thức:

$$f = \overline{x}yz \vee x\overline{z}t \vee \overline{x}yt \text{ và } f = \overline{x}yz \vee \overline{xzt} \vee yzt$$

Cả hai công thức này đều đơn giản như nhau theo Định nghĩa 4.5 nên ta được hai công thức đa thức tối thiểu.

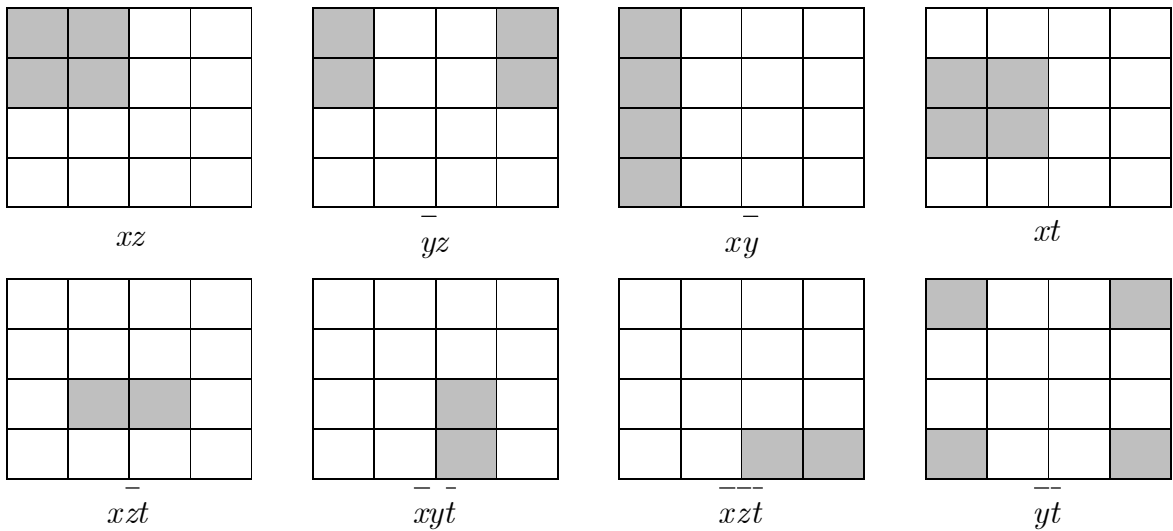
Chú ý. Sử dụng các công thức này để tổng hợp hàm f bằng một mạng các cổng, ta cần 6 cổng *AND* và 2 cổng *OR*.

Ví dụ 4.6. Xét hàm f với biểu đồ Karnaugh sau đây:



Hình 4.18

Bước 1: Biểu đồ Karnaugh của f có 8 tế bào lớn như sau:



Hình 4.19

Bước 2: Các ô (1,2) và (2,4) nằm trong các tế bào lớn duy nhất là xz và $\overline{y}z$ tương ứng. Sau khi chọn các tế bào lớn này thì phần còn lại của biểu đồ Karnaugh của f đều có mỗi ô nằm đúng trong hai tế bào lớn nên ta qua Bước 3.

Hình 4.20

Bước 3: Ta có sơ đồ cách chọn các tế bào lớn còn lại để phủ kín biểu đồ Karnaugh của f theo các nhánh (của hình cây):

i) Chọn $\overline{xy}$: còn lại 4 ô chưa phủ

- Chọn $\overline{yzt}$: còn lại 2 ô chưa phủ

+ Chọn $\overline{xzt}$: phủ kín biểu đồ Karnaugh của f :

$$f = xz \vee \overline{yz} \vee \overline{xy} \vee \overline{yzt} \vee \overline{xzt} \quad (F_1)$$

+ Không chọn $\overline{xzt}$: để phủ hai ô (4,3) và (4,4) ta buộc phải chọn $\overline{xyz}$ và $\overline{yt}$:

$$f = xz \vee \overline{yz} \vee \overline{xy} \vee \overline{yzt} \vee \overline{yt} \quad (F_2)$$

- Không chọn $\overline{yzt}$: để phủ 2 ô (3,2) và (3,3) ta buộc phải chọn xt và $\overline{xyz}$. Lúc này chỉ còn lại ô (4,4). Nếu chọn $\overline{yt}$ ta sẽ được một phép phủ không tối tiểu vì có thể loại bớt tế bào lớn $\overline{xy}$ mà vẫn còn được một phép phủ. Do đó ta buộc phải chọn $\overline{xzt}$:

$$f = xz \vee \overline{yz} \vee \overline{xy} \vee xt \vee \overline{xyz} \vee \overline{xzt} \quad (F_3)$$

ii) Không chọn $\overline{xy}$: Để phủ 2 ô (3,1) và (4,1) ta buộc phải chọn các tế bào lớn xt và $\overline{yt}$. Lúc này còn lại 2 ô chưa phủ là (3,3) và (4,3).

- Chọn $\overline{xyz}$: phủ kín biểu đồ Karnaugh:

$$f = xz \vee \overline{yz} \vee xt \vee \overline{yt} \vee \overline{xyz} \quad (F_4)$$

- Không chọn $\overline{xyz}$: Để phủ 2 ô (3,3) và (4,3) ta buộc phải chọn các tế bào lớn $\overline{yzt}$ và $\overline{xzt}$:

$$f = xz \vee \overline{yz} \vee xt \vee \overline{yt} \vee \overline{yzt} \vee \overline{xzt} \quad (F_5)$$

Bước 4: Ta có 5 công thức đa thức. Tuy nhiên có thể xây dựng dễ dàng các đơn ánh trong Định nghĩa 4.5 cho thấy công thức (F_4) đơn giản hơn (F_1) , (F_2) , (F_3) , (F_5) mà không tương đương (đơn giản như nhau theo Định nghĩa 4.6).

Chẳng hạn như ta có đơn ánh:

$$\begin{aligned}xz &\rightarrow xz \\ \overline{yz} &\rightarrow \overline{yz} \\ \overline{xt} &\rightarrow \overline{xy} \\ \overline{yt} &\rightarrow \overline{yzt} \\ \overline{xyz} &\rightarrow \overline{xzt}\end{aligned}$$

trong đó $\overline{yt}$ chỉ có 2 thừa số là từ đơn trong khi $\overline{yzt}$ có 3 thừa số là từ đơn, nghĩa là (F_4) thực sự đơn giản hơn (F_1) . Các đơn ánh khác cũng được xây dựng tương tự. Tóm lại ta chỉ có một công thức đa thức tối tiểu duy nhất của hàm f là:

$$f = xz \vee \overline{yz} \vee \overline{xt} \vee \overline{yt} \vee \overline{xyz}$$

Chú ý. Sử dụng công thức trên để tổng hợp f bằng mạng các cổng, ta cần 6 cổng AND và 4 cổng OR.

Trường hợp hàm 3 biến

- Đối với các hàm Boole 3 biến, ta sẽ sử dụng hình chữ nhật có 8 ô để biểu diễn B^3 thay vì hình vuông 16 ô.

	x	$\overline{x}$		
z	101	111	011	001
$\overline{z}$	1011	1111	0111	0011
	$\overline{y}$	y	$\overline{y}$	

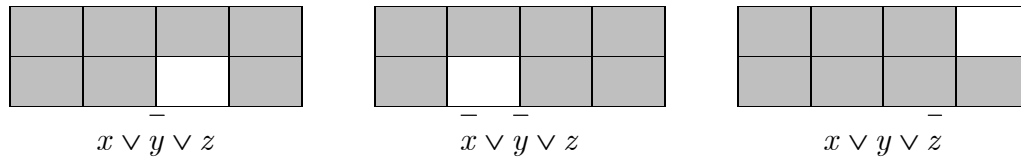
Hình 4.21

Khi ấy định nghĩa biểu đồ Karnaugh, tế bào, tế bào lớn hoàn toàn tương tự và ta có thể áp dụng quy trình 4 bước như trên để tìm công thức đa thức tối tiểu.

Ví dụ 4.7. Xét hàm Boole

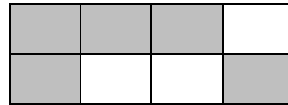
$$f = (x \vee \overline{y} \vee z) (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \vee (x \vee y \vee \overline{z})$$

Biểu đồ Karnaugh của 3 thừa số là:



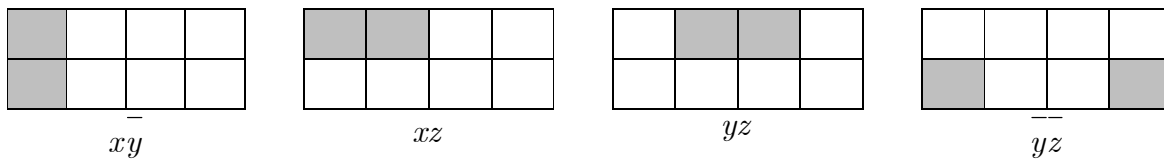
Hình 4.22

Do đó biểu đồ Karnaugh của f có dạng:



Hình 4.23

Bước 1: Có 4 tế bào lớn

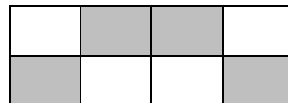


Hình 4.24

Bước 2: Ô (1,2) nằm trong tế bào lớn duy nhất yz

Ô (2,4) nằm trong tế bào lớn duy nhất $\overline{yz}$

Chọn các tế bào này cho phép phủ ta được



Hình 4.25

Bước 3: Còn lại ô (1,1) nằm trong 2 tế bào lớn $\overline{xz}$ và xz . Chọn một trong hai tế bào này ta đều phủ kín biểu đồ Karnaugh của f .

Bước 4: Ta có hai công thức đều là công thức tối thiểu

$$f = yz \vee \overline{yz} \vee \overline{x}y$$

$$f = yz \vee yz \vee xz$$

Trường hợp 5, 6 biến

Đối với hàm Boole 5 biến ta dùng hai lớp hình vuông 16 ô để biểu diễn 32 ô vuông của B^5 , một lớp tương ứng với giá trị của biến thứ năm $v = 0$ và lớp ứng với $v = 1$.

Biểu đồ Karnaugh của một hàm Boole theo năm biến x, y, z, t, v được thiết lập bằng cách gạch chéo các ô trong hai lớp trên ứng với các điểm ở đó f lấy giá trị 1. Ở đây ngoài các tế bào là những hình chữ nhật trong mỗi lớp, ta có các tế bào là hai hình chữ nhật (tế bào) tế bào thuộc hai lớp có cùng hình chiếu xuống một mặt phẳng nằm ngang, hay nói cách khác, khối chữ nhật ba chiều với chiều cao hai lớp và đáy là một tế bào. Bằng cách này ta được các tế bào là biểu đồ Karnaugh của tích p thừa số ($1 \leq p \leq 5$) là từ đơn. Tế bào tương ứng sẽ có 2^{5-p} ô. Phương pháp biểu đồ Karnaugh để tìm công thức đa thức tối thiểu hoàn toàn tương tự trường hợp 4 biến.

Trong trường hợp hàm 6 biến ta sử dụng bốn lớp 16 ô thay vì hai lớp. Các lớp kể từ trên xuống bây giờ ứng với $v = 1, w = 0; v = 1, w = 1; v = 0, w = 1; v = 0, w = 0$. Phương pháp tìm công thức đa thức tối thiểu cũng tương tự nhưng hình vẽ phức tạp hơn. Do đó đối với trường hợp này hay trường hợp nhiều biến hơn ta sẽ dùng phương pháp khác.

TIÊU KẾT CHƯƠNG 4

A. Hệ thống nội dung trọng tâm

Nội dung chương này bao gồm: Những khái niệm cơ bản của đại số Boole như định nghĩa, tính chất, các ví dụ minh họa. Khái niệm về hàm Boole, bài toán nhằm tối ưu hóa công thức hàm Boole. Phương pháp biểu đồ Karnaugh gồm các thuật toán tìm công thức đa thức tối thiểu của hàm Boole có ba hoặc bốn biến.

B. Nội dung thảo luận – nhiệm vụ học tập

1. Thế nào là đại số Boole. Cho ví dụ.
2. Thế nào là hàm Boole. Cho ví dụ.
3. Phương pháp biểu đồ Karnaugh ba biến. Cho ví dụ.
4. Phương pháp biểu đồ Karnaugh bốn biến. Cho ví dụ.

C. Bài tập chương

4.1. Chứng minh rằng trong một đại số Boole A thì phần bù của một phần tử là duy nhất.

4.2. Trong một đại số Boole hãy tìm phần bù của:

a. $(\bar{b} \wedge c) \vee (c \wedge d)$

b. $(b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge a) \vee (a \wedge c)$

4.3. A là một đại số Boole, $a \in \theta$. Tập hợp tất cả phần tử trội bởi a có là một đại số Boole không?

4.4. Gọi U_{210} là tập hợp các ước dương của 210. Trong U_{210} ta định nghĩa các phép toán $\wedge, \vee, \bar{}$ như sau: Với mọi x, y thuộc U_{210} thì

$$x \vee y = BSCNN(x, y) \quad (\text{bội số chung nhỏ nhất})$$

$$x \wedge y = USCLN(x, y) \quad (\text{ước số chung lớn nhất})$$

$$\bar{x} = \frac{210}{x}$$

Chứng minh rằng U_{210} là một đại số Boole.

4.5. Xét ánh xạ: $\varphi: U_{210} \rightarrow P(a, b, c, d)$ sao cho

$$\varphi(2) = \{a\}, \varphi(3) = \{b\}, \varphi(5) = \{c\}, \varphi(7) = \{d\}.$$

Tìm ảnh của 35, 70, 42 để φ là một đẳng cấu đại số Boole.

4.6. Có bao nhiêu đẳng cấu khác nhau từ U_{210} lên $P(a, b, c, d)$.

4.7. Giả sử B là một đại số Boole và A là một tập hợp khác $\emptyset$. Với $f, g \in B^A$, định nghĩa:

$$\forall x \in A : (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$$

$$\forall x \in A : (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$$

$$\forall x \in A : \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$$

Chứng minh rằng B^A là một đại số Boole với các phép toán trên.

4.8. Giả sử A, B là hai đại số Boole. Trên $A \times B$, định nghĩa:

$$(x, y) \wedge (z, t) = (x \wedge z, y \wedge t)$$

$$(x, y) \vee (z, t) = (x \vee z, y \vee t)$$

$$\overline{(x, y)} = (\overline{x}, \overline{y})$$

Chứng minh rằng $A \times B$ là một đại số Boole với các phép toán trên.

4.9. Trên đại số Boole A định nghĩa phép toán

$$a \oplus b = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)$$

a. Chứng minh rằng phép toán trên thoả:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

$$a \oplus 0 = a$$

$$a \oplus a = 0$$

$$a \wedge (b \oplus c) = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)$$

b. Ngược lại nếu $\oplus$ là một phép toán trên A thoả các điều kiện trên thì

$$a \oplus b = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) \text{ được thoả.}$$

4.10. Tập hợp U_{1728} , các ước dương của 1728 có là một đại số Boole không? Có các phép toán nào khác để U_{1728} trở thành đại số Boole?

4.11. Tìm giá trị của các hàm Boole dưới đây khi các biến x, y, z và t lấy giá trị 1, 1, 0 và 0:

a. $\overline{xy} \vee \overline{xy}$

b. $t \vee \overline{xy}$

c. $tx \vee \overline{y} \vee yz$

d. $tx \vee xy \vee yz$

e. $\left(tx \vee yz\right) \vee t\overline{z} \vee \overline{(t \vee y)}(\overline{x \vee y})$

4.12. Tìm tất cả các giá trị của y và z để các biểu thức dưới đây luôn lấy giá trị 1 và biết rằng $x = 1$.

a. $x \vee xy \vee z$

b. $xy \vee z$

c. $\overline{xy} \vee xz$

d. $\overline{xy} \vee z$

4.13. Tìm từ tối thiểu theo bốn biến x, y, z, t biết rằng nó lấy giá trị 1 tại:

a. $x = t = 0, y = z = 1$

b. $x = y = 1, z = t = 0$

c. $x = y = z = 1, t = 0$

d. $x = y = z = t = 0$

4.14. Có bao nhiêu hàm Boole sáu biến lấy giá trị 1 tại các điểm có đúng hai thành phần có giá trị 1 (tại các điểm khác hàm Boole có thể bằng 0 hay 1).

4.15. Có bao nhiêu hàm Boole sáu biến lấy giá trị 1 tại các điểm có ít nhất hai thành phần có giá trị 1 (tại các điểm khác hàm Boole có thể bằng 0 hay 1).

4.16. Có bao nhiêu hàm Boole sáu biến không phụ thuộc biến thứ nhất. Có bao nhiêu hàm không phụ thuộc ba biến đầu tiên.

4.17. Tìm các hàm Boole theo hai biến sao cho: $f(x, y) = f(y, x)$.

4.18. Xác định tất cả các hàm Boole theo ba biến sao cho: $f(x, y, z) = f(y, z, x)$.

4.19. Xác định các hàm Boole theo ba biến biết rằng nó không thay đổi giá trị nếu ta hoán vị hai biến bất kì.

4.20. a. Chứng minh rằng mọi hàm Boole f theo n biến đều được viết dưới dạng:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[xf(1, x_2, x_3, \dots, x_n) \right] \vee \left[\overline{x_1} f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) \right]$$

b. Sử dụng hệ thức trên để xây dựng một thể song ánh giữa $F_n \times F_n$ vào F_{n+1} . Áp dụng để tìm lại số phần tử của F_n .

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Cam-Chu Đức Khánh (1999), *Lý thuyết đồ thị*, NXB Thành phố Hồ Chí Minh.
- [2] Trần Quốc Chiến (2010), *Giáo trình lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, NXB DHSP.
- [3] Hoàng Chúng (1998), *Đại cương về toán học hữu hạn*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [4] Trần Ngọc Danh (2004), *Toán rời rạc nâng cao*, NXB ĐH Quốc gia TP. HCM.
- [5] Phan Đình Diệu (1977), *Lý thuyết Ô-tô-mat và thuật toán*, NXB Đại học và THCN.
- [6] Đỗ Đức Giáo (2000), *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [7] Đỗ Đức Giáo (2011), *Toán rời rạc ứng dụng trong Tin học*, NXB Giáo dục.
- [8] Vũ Đình Hòa (2001), *Định lý và vấn đề về đồ thị hữu hạn*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [9] Vũ Đình Hòa (2001), *Một số kiến thức cơ sở về Graph hữu hạn*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [10] Doãn Tam Hòa (2005), *Lý thuyết tối ưu và đồ thị*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [11] Kenneth H. Rosen (dịch bởi Phạm Văn Thiều và Đặng Hữu Thịnh) (2007), *Toán học rời rạc Ứng dụng trong tin học*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.
- [12] Nguyễn Xuân Quỳnh (1995), *Cơ sở toán rời rạc và ứng dụng*, NXB Giáo dục.
- [13] Đặng Huy Ruận (2000), *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, NXB Khoa học và Kỹ thuật,.
- [14] Nguyễn Đức Nghĩa - Nguyễn Tô Thành (1997), *Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

- [15] Nguyễn Anh Tuấn (2019), *Giáo trình Logic toán và lịch sử Toán*, NXB ĐHSP, Hà Nội (tái bản lần thứ ba có bổ sung).

Tiếng Anh

- [16] Richard Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York 1992.
- [17] Neville Dean, *Essence of Discrete Mathematics* Prentice Hall. ISBN 0-13-345943-8. Not as in depth as above texts, but a gentle intro.
- [18] Ronald Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*
- [19] Robin J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Fourth Edition, Longman Publisher, 1996. MSTV: PĐCH 2221.
- [20] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics*, 3rd Edition, Addison - Wesley Publishing Company, 1994.
- [21] Richard Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Second Edition, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [22] John A. Dossey, *Discrete Mathematics*, 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York, 1993.
- [23] John G. Michaels and Kenneth H. Rosen, *Applications of Discrete Mathematics*, Mc. Graw - Hill, Inc., 1994.
- [24] John E. Manro, *Discrete Mathematics for Computing*, Thomas Nelson Publisher, 1992.
- [25] Gary Chartrand and Ortrud R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, Mc. Graw - Hill, Inc., 1993.

Tiếng Pháp

- [26] Claude Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris 1963.

Website

- [27] <https://www.howkteam.vn/d/toan-roi-rac-ung-dung-trong-tin-hoc-227>
- [28] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications* 5th ed. McGraw Hill. ISBN 0-07-293033-0. Companion Website: <http://www.mhhe.com/math/advmath/rosen/>

- [29] Richard Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics* 5th ed. Macmillan. ISBN 0-13-089008-1. Companion Web site:
<http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/johnsonbaugh4/> Lưu trữ 2005-12-08 tại Wayback Machine
- [30] Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics* 2nd ed. Oxford University Press. ISBN 0-19-850717-8. Companion Web site:
<http://www.oup.co.uk/isbn/0-19-850717-8> includes questions together with solutions..
- [31] Mathematics Archives, Discrete Mathematics links to syllabi, tutorials, programs, etc. <http://archives.math.utk.edu/topics/discreteMath.html>.